TEO. La classe REG è chiusa rispetto a $\cup$ e $\cap$.

ES. Anche per $\neg$ (complemento).

DIM. Siano $L_1, L_2 \in$ REG. Allora esistono DFA

$$D_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$$

$$D_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$$

t.c. $L(D_1) = L_1$ e $L(D_2) = L_2$.

Devo definire D DFA t.c. $L(D) = L_1 \cup L_2$.

Definisco: $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) : r_1 \in Q_1, r_2 \in Q_2\}$.
- Per ogni $(r_1, r_2) \in Q$ e per ogni $a \in \Sigma$

$$\delta((r_1, r_2), a) = \Big(\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a)\Big)$$

- $q_0 = (q_1, q_2)$

- $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$

$= \{ (r_1, r_2) : r_1 \in F_1$ oppure $r_2 \in F_2 \}$

(Intersezione: $F = F_1 \times F_2$.)

È chiaro: (i) Se $x \in (L_1 \cup L_2) \Rightarrow x \in L(D)$.

(ii) Se $x \in L(D) \Rightarrow x \in (L_1 \cup L_2)$.

$\blacksquare$

Più complicato: Concatenazione. Ovvero voglio mostrare che REG è chiuso per $\circ$.

Se $L_1 \in REG$ e $L_2 \in REG$ allora

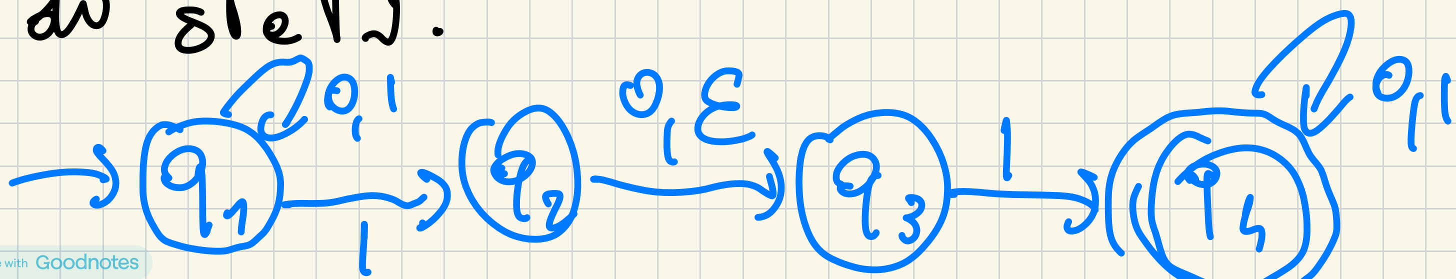
$L_1 \circ L_2 = L \in REG.$

Che significa? Significa che $\exists$ DFA D che dato x è in grado di verificare se x può essere scomposto in $x_1 \circ x_2$ t.c. $x_1 \in L_1$
$x_2 \in L_2$

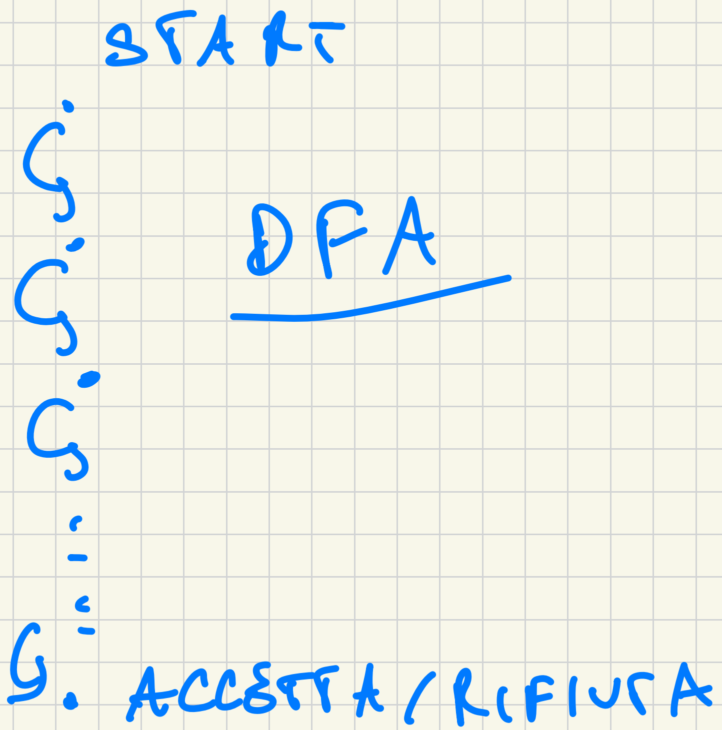
NON DETERMINISMO

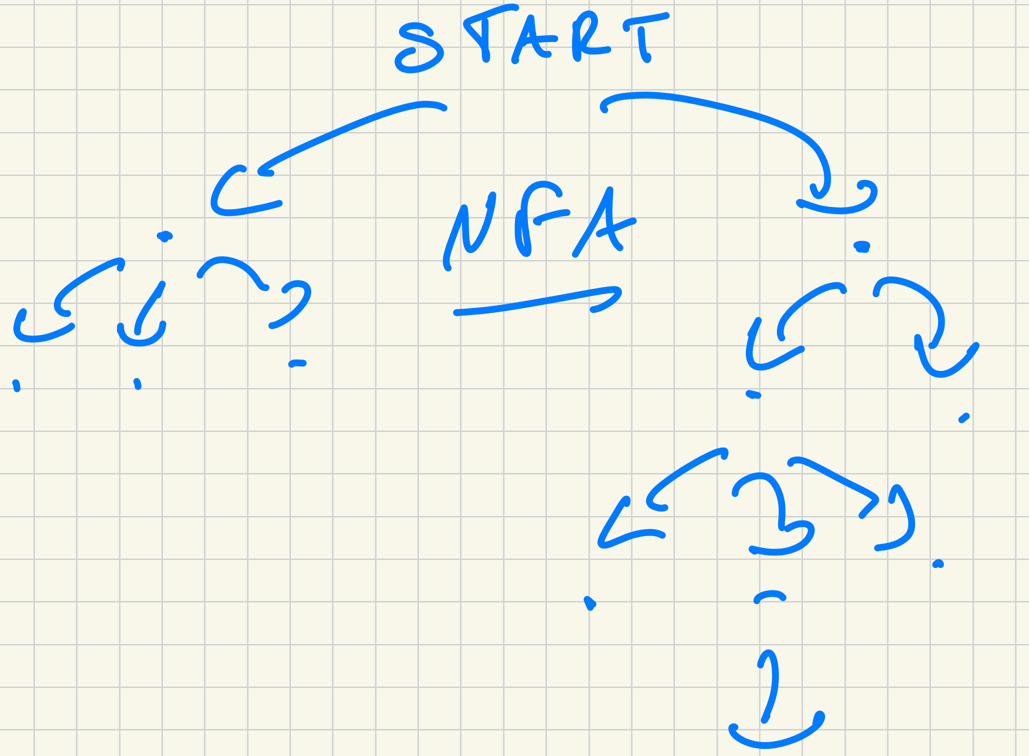
Come un modello di automa più generale.

Non determinismo: NFA dato uno stato $q \in Q$ e un simbolo $a \in \Sigma$ può andare in un INSIEME di stati.



Lo possiamo figurare così:





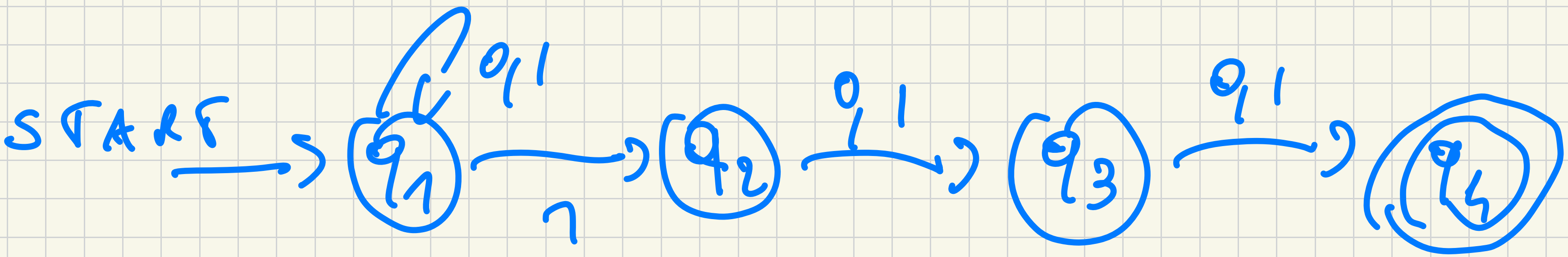
<u>Nota</u>: NFA accetta sse c'è un cammino che accetta.

<u>DEF (NFA)</u>. Un NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ è t.c. Q, Σ, q_0, F sono identici alla def. DFA

mentre $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$

$\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

$\mathcal{P}(Q)$ ↪ INSIEME delle PARTI di Q.



$L = \{ x \in \{0,1\}^* : x$ ha '1' in terzultima pos. $\}$

Esempio: $w = 10110$

$q_1, 10110$

$q_1, 0110$ $\quad$ $q_2, 0110$

$q_1, 110$ $\quad$ $q_3, 110$

$q_1, 10$ $\quad$ $q_2, 10$ $\quad$ $q_4, 10$ $\quad$ × RIFIUTA

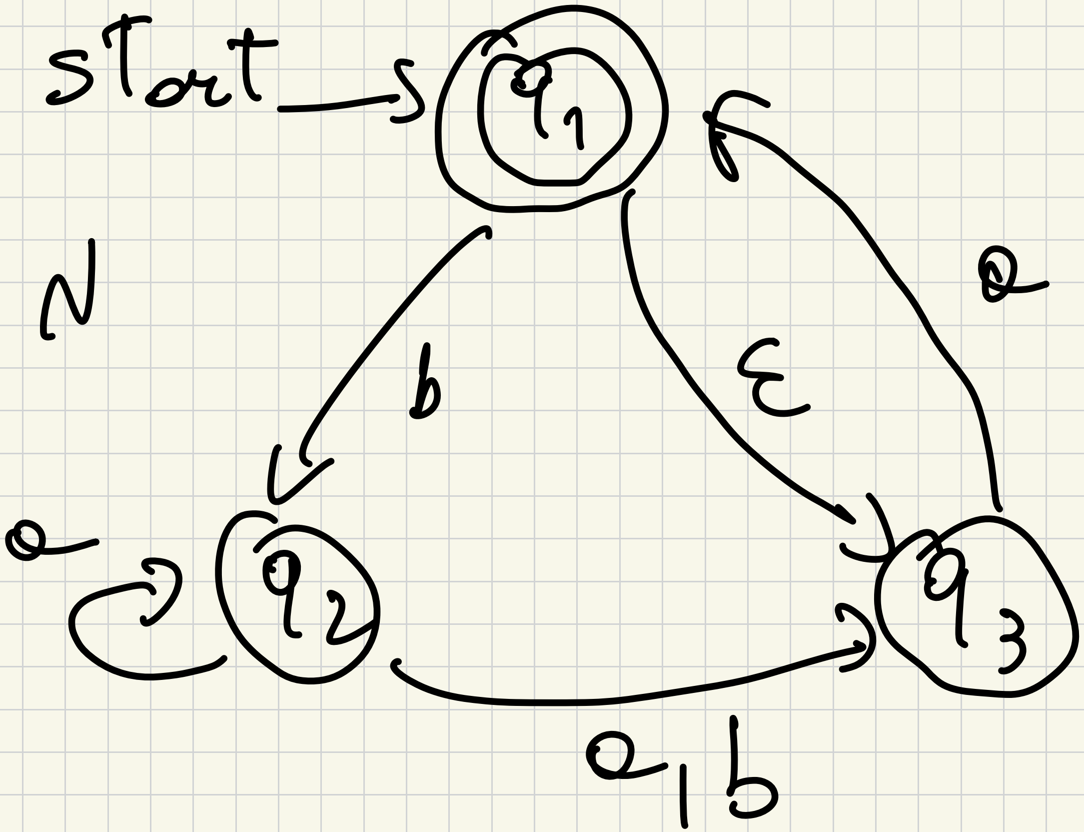
$q_1, 0$ $\quad$ $q_2, 0$ $\quad$ $q_3, 0$

RIFIUTA

q_1, ε × $\quad$ q_3, ε × $\quad$ q_4 ACCETTO ✓

Altro esempio:

N



N accetta: ε, a, baba, baa ...

N rifiuta: b, bb, babba ...

$w = \varepsilon$

q_1, ε

✓ ACCETTA

$w = a$

q_1, a

RIFIUTA

q_3, a

q_1, ε ✓

ACCETTA

Configurazioni per NFA: Una configurazione per NFA N è $(q, x) \in Q \times \Sigma_\varepsilon^*$. Diremo

$$(p, ax) \vdash_N (q, x) \quad \text{sse} \quad q \in \delta(p, a)$$

$$a \in \Sigma_\varepsilon, \; x \in \Sigma_\varepsilon^*$$

$$p, q \in Q$$

(Nel caso di DFA avevamo "$|$" = "$|$".)

Posso considerare la chiusura riflessiva e transitiva di $\vdash_N$, detta $\vdash_N^*$

N accetta $w \in \Sigma_\varepsilon^*$ sse esiste $q \in F$ tale che $(q_0, w) \vdash_N^* (q, \varepsilon)$.

Alternativa: N accetta $w \in \Sigma_\varepsilon^*$ sse
$w = y_1 \dots y_m$ ed esistono $r_0, \dots, r_m$ t.c.

(i) $r_0 = q_0$; (ii) $r_{i+1} \in \delta(r_i, y_{i+1})$

(iii) $r_m \in F$.

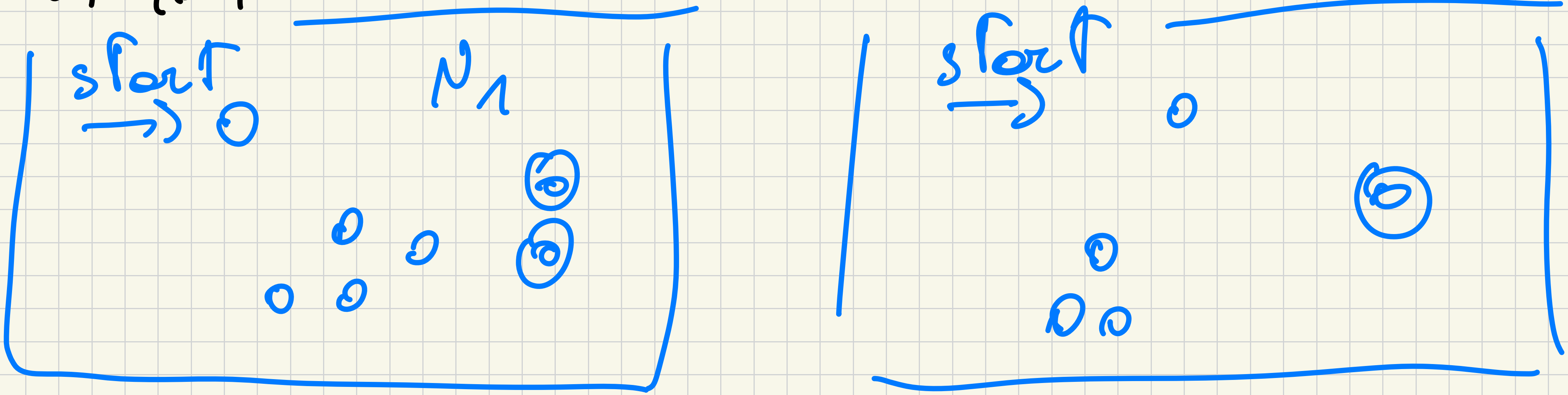
Prossima volta:

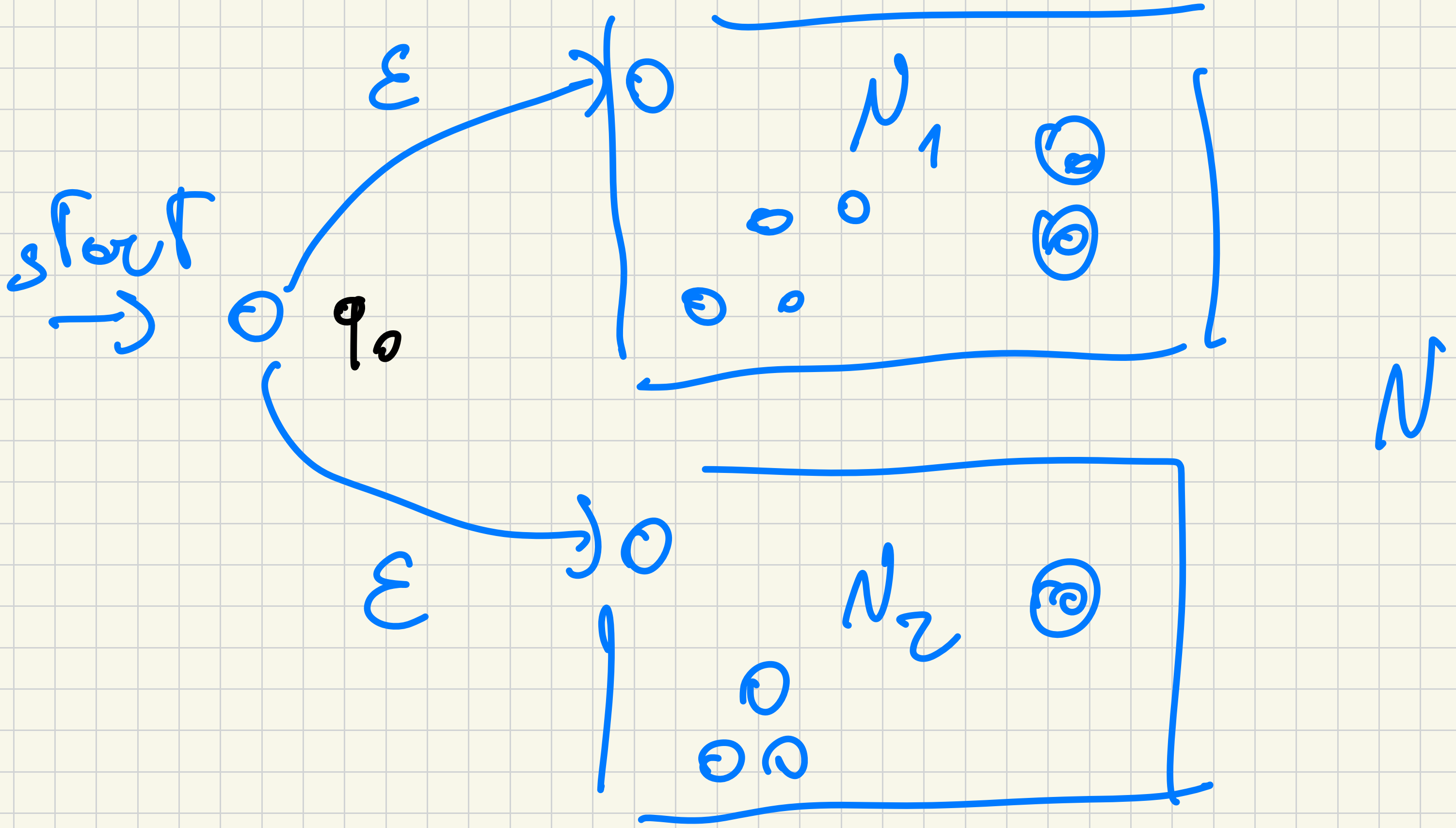
TEO. $\mathcal{L}(NFA) = \mathcal{L}(DFA) = REG$.

$$\mathcal{L}(NFA) = \{ L \subseteq \Sigma_\varepsilon^* : \exists \text{ NFA } N \text{ t.c. } L = L(N) \}$$

Rivisitiamo l'unione. Siano $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ ed $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ NFA per, rispettivamente, L_1 ed L_2.

Allora è semplice costruire NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ t.c. $L(N) = L_1 \cup L_2$.





- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$
- $F = F_1 \cup F_2$
- Per $q \in Q$, $a \in \Sigma_\varepsilon$: $\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & q = q_0,\ a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_0,\ a \neq \varepsilon \end{cases}$