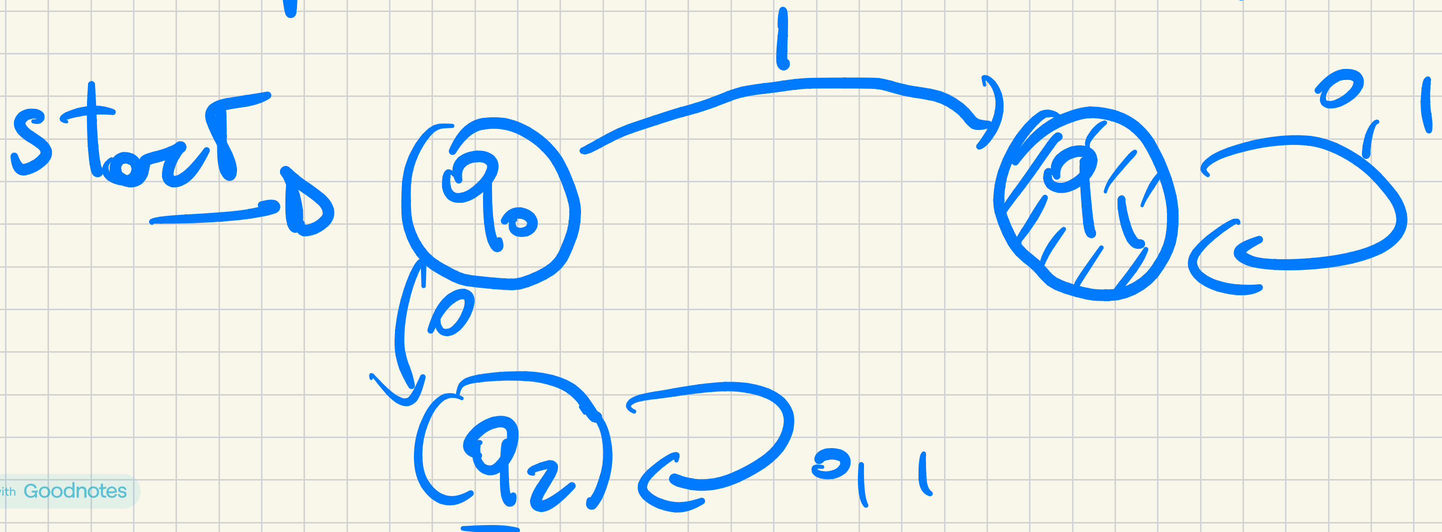
# Def (Linguaggi regolari).

$$REG = \{ L \subseteq \Sigma^* : \exists \text{ DFA } M \text{ t.c. } L(M) = L \}$$

Vogliamo capire come progettare DFA per un dato linguaggio.

Esempio: $L = \{ x \in \{0,1\}^* : x = 1 \| y, \ y \in \{0,1\}^* \}$



Prova di correttezza:

DFA accetta $x$ sse $x \in L$.

Osserviamo:

$$\delta^*(q_1, u) = q_1 \quad \forall\, u \in \{0,1\}^*$$

$$\delta^*(q_2, u) = q_2 \quad \forall\, u \in \{0,1\}^*$$

Per induzione dimostriamo $x \in L$ sse DFA accetta $x$.

__BASE__ $|x| = 0$. Se $x = \varepsilon$, $\delta^*(q_0, \varepsilon)$

$$= \delta(q_0, \varepsilon) = q_0 \notin F$$

INDUTTIVO Sia $n > 0$. supponiamo che $|w| \leq n$

$$\delta^*(q_0, w) = \begin{cases} q_0 & \text{se } w = \varepsilon \\ q_1 & \text{se } w \text{ termina con } 1 \\ q_2 & \text{se } w \text{ termina con } 0 \end{cases}$$

Prendo $x$ t.c. $|x| = n+1$ e lo penso

$x = eu$ con $e \in \{0,1\}$
$u \in \{0,1\}^n$

$$\delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, eu)$$
$$= \delta^*(\delta(q_0, e), u)$$

$\delta(q_0, e) = q_2$ se $e = 0$

$\delta(q_0, e) = q_1$ se $e = 1$

$\Rightarrow \delta^*(q_0, x) = q_1$ sse $e = 1$

Esercizio:

$$L = \{ x \in \{0,1\}^* : w_H(x) \geq 3 \}$$

dove $w_H(x) = \# 1$ in $x \in \{0,1\}^*$

$$L = \{ x \in \{0,1\}^* : x = 0^n 1 \text{ con } n \in \mathbb{N} \}$$

## OPERAZIONI SUI LINGUAGGI

Fissiamo $\Sigma = \{0,1\}$. Per $n \in \mathbb{N}$,

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}$$

Siccome linguaggi sono insieme di stringhe posso considerare su di essi operazioni:

- UNIONE: $L_1 \cup L_2 = \{ x \in \Sigma^* : x \in L_1$ oppure $x \in L_2 \}$

- INTERSEZIONE: $L_1 \cap L_2 = \{ x \in \Sigma^* : x \in L_1$ e $x \in L_2 \}$

- COMPLEMENTO: $\overline{L} = \{ x \in \Sigma^* : x \notin L \}$

La CONCATENAZIONE. Se abbiamo

$$x = a_1 \dots a_n \, ; \, y = b_1 \dots b_m$$

$$n, m > 0$$

$$xy = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m \in \Sigma^*$$

$$\varepsilon x = x \varepsilon = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \varepsilon = x \\ x(ya) = (xy)a \end{cases}$$

$$x, y \in \Sigma^*, \; a \in \Sigma$$

Posso concatenare i linguaggi:

$$L_1 \circ L_2 = \{ xy : x \in L_1 \text{ e } y \in L_2 \}$$

Es: $\Sigma = \{a, b\}$

$L_1 = \{a, ab, ba\}$

$L_2 = \{ab, b\}$

$L_1 \circ L_2 = \{aab, ab, abab, abb, baab, bab\}$

La POTENZA è un caso speciale. Per le stringhe $x^n = x \cdots x$ $n$ volte.

$x \in \Sigma^*$.

$$\begin{cases} x^0 = \varepsilon \\ x^{n+1} = x^n x \end{cases}$$

Lo stesso per i linguaggi:

$$\begin{cases} L^0 = \{\varepsilon\} \\ L^{n+1} = L^n \circ L \end{cases}$$

Es: $L = \{a, ab, ba\}$

$$L^2 = \{aa, aab, aba, abab, abba, baa, baab, baba\}$$

La $*$:

$$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n = \{\varepsilon\} \cup L^1 \cup L^2 \cup \dots$$

Es: $L = \{a, b\}$

$$L^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, bb, ba, aaa \dots$$

Vogliamo studiare le proprietà di CHIUSURA dei linguaggi REGOLARI.

Ovvero: Se $L_1, L_2 \in REG$, posso dire che $L_1 \cup L_2 \in REG$? $L_1 \cap L_2$?

$\overline{L_1}$, $L_1^*$ ???

**TEO** REG è chiusa per UNIONE.

Intuizione: $L_1, L_2 \in REG \Rightarrow$

$\exists M_1, M_2 \in DFA$ t.c. $L(M_1) = L_1$

$L(M_2) = L_2$

Devo definire $M$ t.c. $L(M) = L_1 \cup L_2$.
Problema: dato $x$ candidato non posso prima provare e vedere se $M_1(x)$ accetta.
Idea: $M$ deve eseguire $M_1, M_2$ in parallelo e accettare sse uno dei due accetta.