TEO Un linguaggio è regolare sse esiste un NFA che lo riconosce.

DIM. Da una parte $\mathcal{L}(DFA) \subseteq \mathcal{L}(NFA)$. Questo perché un DFA è un caso speciale di NFA.

D'altra parte, mostriamo $\mathcal{L}(NFA) \subseteq \mathcal{L}(DFA)$. Sia $L \in \mathcal{L}(NFA)$: $\exists$ NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0^N, F_N)$ t.c. $L = L(N)$. Costruiamo $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_0^D, F_D)$ DFA t.c. $L(D) = L$.

Supponiamo che non ci siano ε-archi.

- $Q_D = P(Q_N)$

- $q_0^D = \{ q_0^N \}$

- $F_D = \{ R \in Q_D : R \cap F_N \neq \emptyset \}$

ovvero D accetta in R se anche solo uno degli stati di Q_N in R è accettante.

- Siano $R \in Q_D$ e sia $a \in \Sigma$:

$$\delta_D(R, a) = \bigcup_{r \in R} \delta_N(r, a)$$

$$= \{ q \in Q_N : q \in \delta_N(r, a) \text{ per } r \in R \}$$

Teniamo conto degli ε-archi. Sia $R \in Q_D$

Made with Goodnotes

$E(R) = \{ q \in Q_N : q$ può essere raggiunto da stato $r \in R$ con 0 o più ε-archi $\}$.

Lo stato iniziale : $q_0^D = E(\{q_0^N\})$

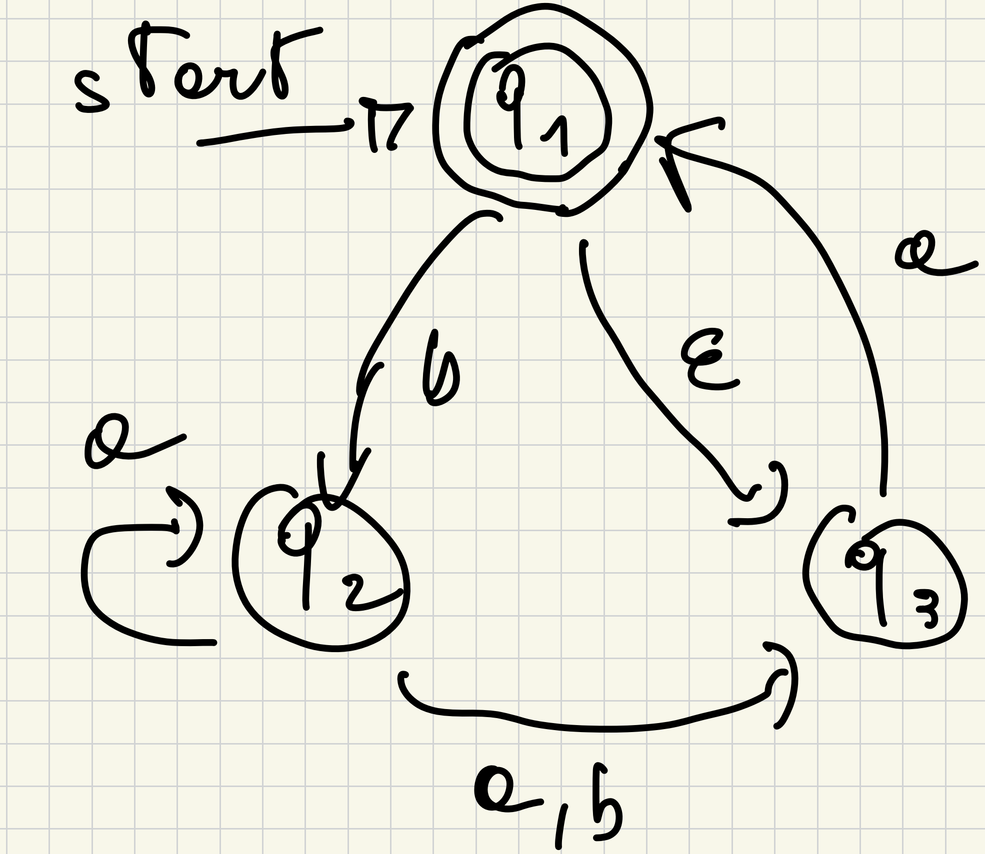
La funzione di transizione :

$$\delta_D(R, a) = \bigcup_{r \in R} E(\delta_N(r, a))$$

$$= \{ q \in Q_N : q \in E(\delta_N(r, a)) \text{ per } r \in R \}$$

Correttezza : È chiaro perché D tiene traccia di tutte le diramazioni possibili in una esecuzione di N. $\boxtimes$

Esempio.



Consideriamo NFA di figura. Simulare con DFA.

Seguiamo i passi della dimostrazione del TEOREMA.

$$Q_D = \{ q_\emptyset, q_{\{1\}}, q_{\{2\}}, q_{\{3\}}, q_{\{1,2\}}, q_{\{1,3\}}, q_{\{2,3\}}, q_{\{1,2,3\}} \}$$

$p_{1,3}$

Made with Goodnotes

$= \{ p_\emptyset, p_1, p_2, p_3, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{2,3}, p_{1,2,3} \}$

$q_0^D = p_{1,3}$ perché $E(q_1) = \{q_1, q_3\}$.

$F_D = \{ p_1, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,2,3} \}$

La δ_D, guardando il grafico:

- Nello stato q_2 su input a, N raggiunge q_2 e q_3 : $\delta_D(p_2, a) = p_{2,3}$

  Su input b va solo in q_3 : $\delta_D(p_2, b) = p_3$

- Nello stato q_1 su input a, N va in $\emptyset$

$$\delta_N(q_1, e) = \emptyset$$

$$E(\delta_N(q_1, e)) = \emptyset \qquad \delta_D(p_1, e) = p_0$$

Quando legge b va in q_2 : $\delta_D(p_1, b) = p_2$

- Nello stato q_3, su input e N va in q_1. $\delta_N(q_3, e) = q_1$.

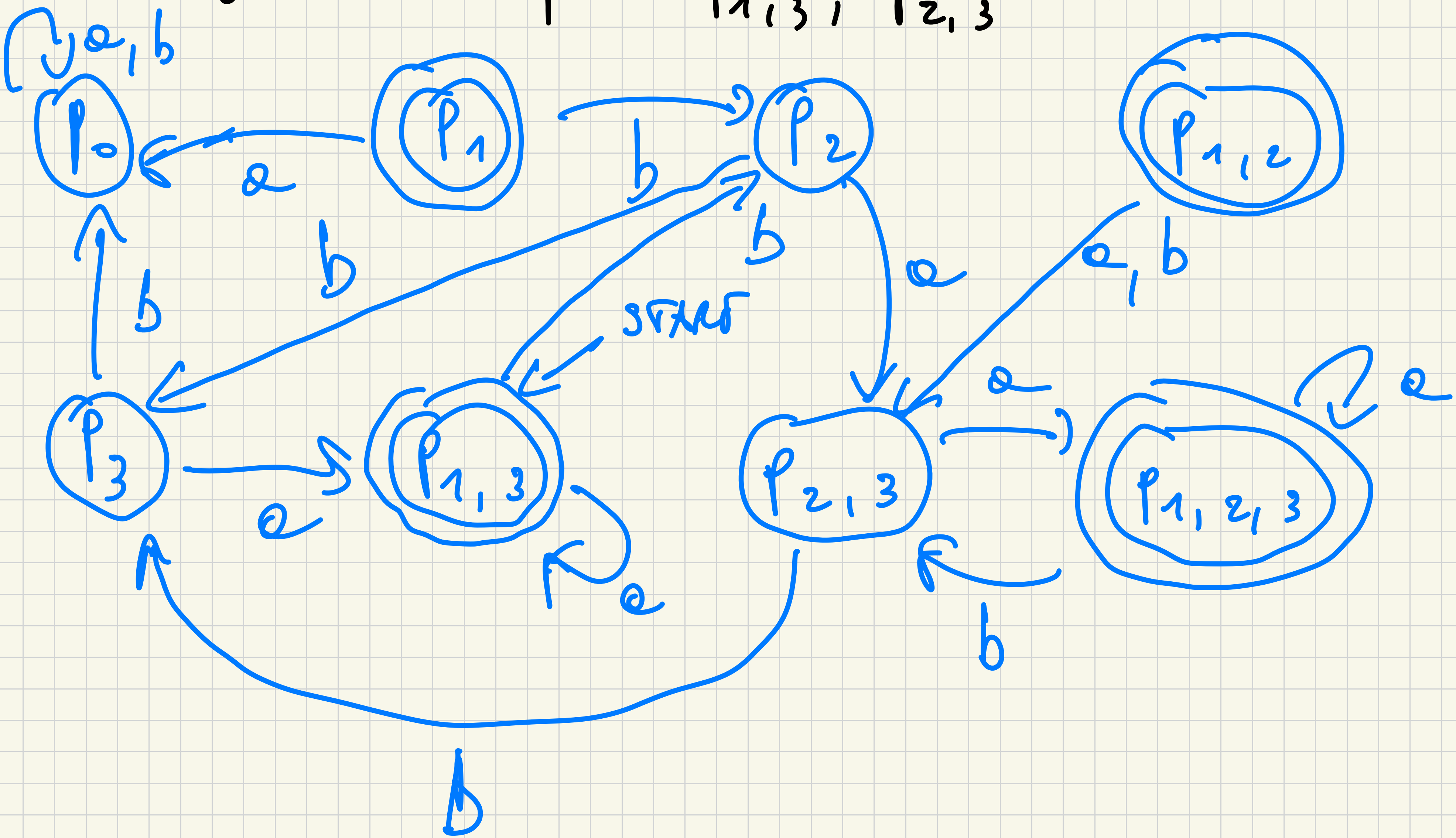
$$E(\delta_N(q_3, e)) = \{q_1, q_3\}$$

$$\delta_D(p_3, e) = p_{1,3}$$

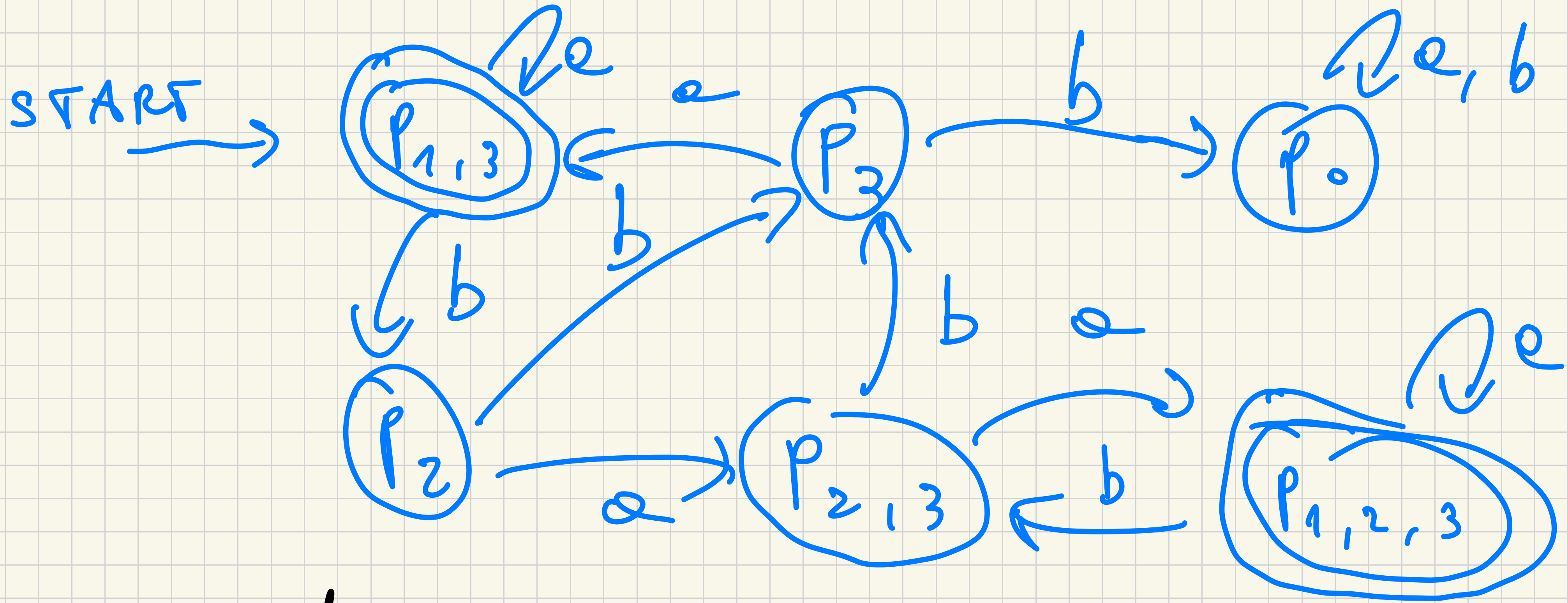
Su input b, N va in $\emptyset$: $\delta_D(p_3, b) = p_0$

Made with Goodnotes

È così vale per $p_{1,3}$, $p_{2,3}$ ...

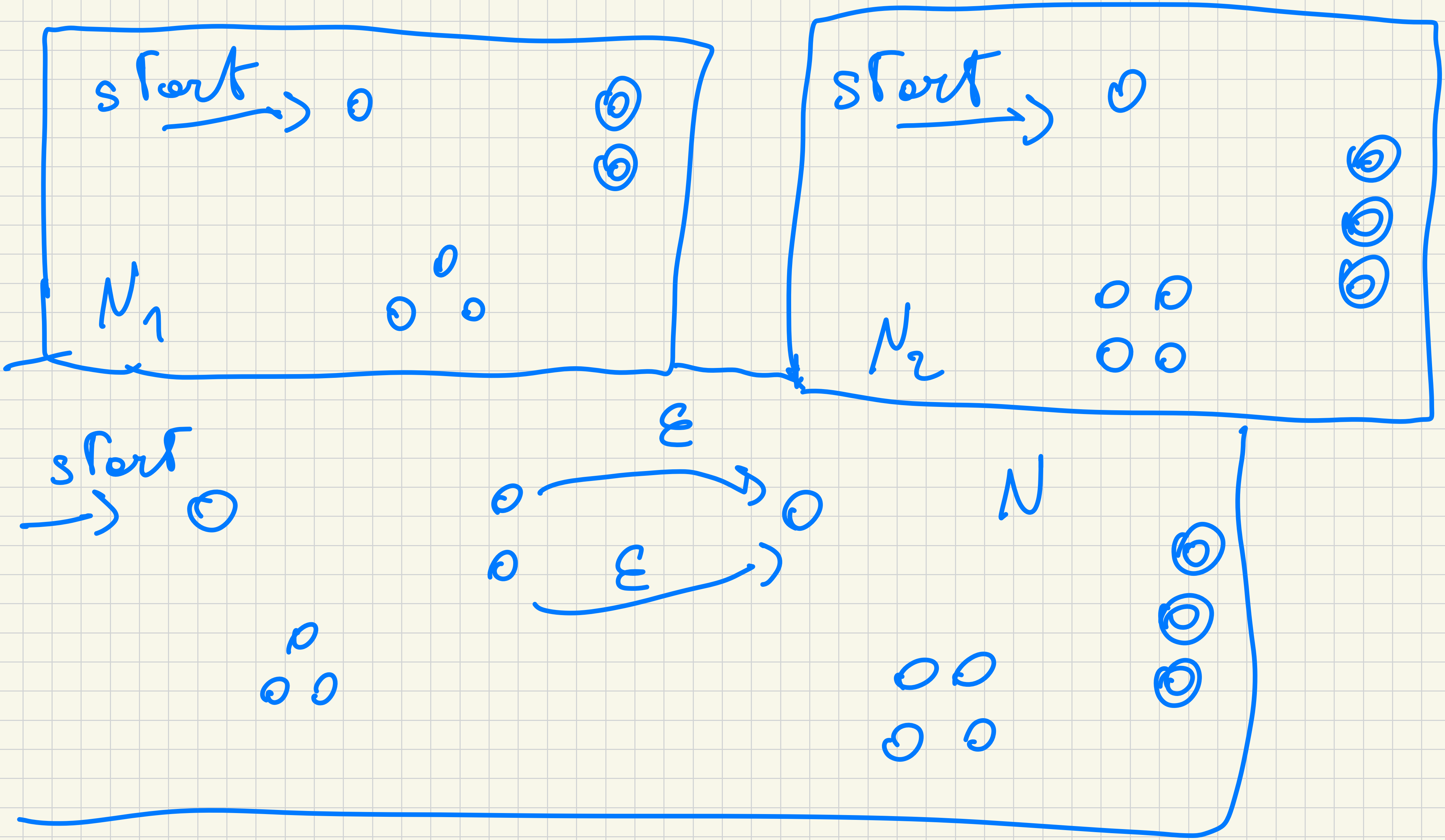


Made with Goodnotes



TEO. La classe REG è chiusa per $\circ$.

DIM. Siano $L_1, L_2 \in$ REG. Allora esistono N_1, N_2 t.c. $L(N_1) = L_1$, $L(N_2) = L_2$.
Definisco N t.c. $L(N) = L_1 \circ L_2$.



Più precisamente $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
dove:

Made with Goodnotes

- $q_0 = q_1$ (stato iniziale di N_1)
- $Q = Q_1 \cup Q_2$
- $F = F_2$
- Per $q \in Q$ e $a \in \Sigma_\varepsilon$:

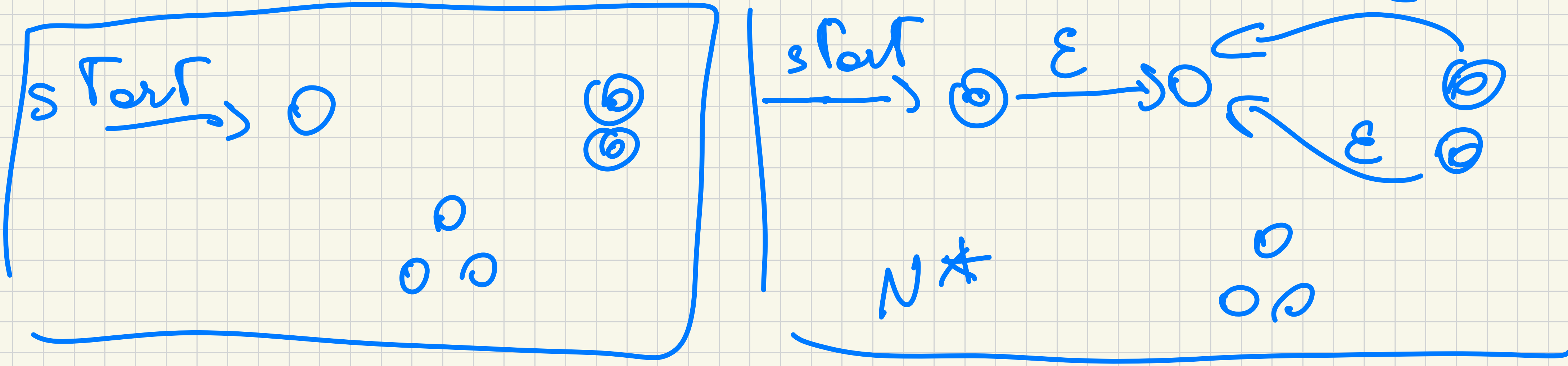
$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1, q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & q \in F_1, a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_2\} & q \in F_1, a = \varepsilon \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2 \end{cases}$$

Made with Goodnotes

TEO La classe REG è chiusa per $*$.

Dim. Sia $L \in REG$: esiste N t.c. $L(N) = L$.

Costruisco N^* t.c. $L^* = L(N^*)$.



Precisamente, $N^* = (Q^*, \Sigma, \delta^*, q_0^*, F^*)$:

- q_0^* è un nuovo stato
- $F^* = F \cup \{q_0^*\}$

- $Q^* = Q \cup \{q_0^*\}$

- Per $q \in Q^*$ e $a \in \Sigma_\varepsilon$:

$$\delta^*(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) & q \in Q, q \notin F \\ \delta(q, a) & q \in F_1, a \neq \varepsilon \\ \delta(q, a) \cup \{q_0\} & q \in F_1, a = \varepsilon \\ \{q_0\} & q = q_0^*, a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_0^*, a \neq \varepsilon \end{cases}$$

Made with Goodnotes

ESPRESSIONI REGOLARI

Come le espressioni algebriche, ma sulle stringhe. Dato un alfabeto formiamo espressioni del tipo $(0 \cup 1)0^*$ che rappresentano insiemi di stringhe.

$$(0 \cup 1) \equiv \{0\} \cup \{1\} \equiv \{0, 1\}$$

$$0^* \equiv \{0\}^*$$

$$(0 \cup 1)0^* \equiv \{0, 1\} \circ \{0\}^*$$

DEF (ESPRESSIONE REGOLARE). Sia Σ un

Made with Goodnotes

alfabeto. Una espressione regolare r su Σ ($r \in re(\Sigma)$) è definita:

- CASO BASE:

$$\begin{cases} r = \emptyset \in re(\Sigma) & L(r) = \emptyset \\ r = \varepsilon \in re(\Sigma) & L(r) = \{\varepsilon\} \\ r = a \in re(\Sigma) & L(r) = \{a\} \end{cases}$$

- CASO INDUTTIVO:

$$\begin{cases} r = r_1 \cup r_2 \,, & r_1, r_2 \in re(\Sigma) \quad L(r_1) \cup L(r_2) \\ r = r_1 \circ r_2 \,, & r_1, r_2 \in re(\Sigma) \quad L(r_1) \circ L(r_2) \\ r = r_1^* \,, & r_1 \in re(\Sigma) \quad L(r_1)^* \end{cases}$$

Made with Goodnotes

Ad ogni $r \in re(\Sigma)$ posso associare un linguaggio $L(r)$.

Esempio: Se $\Sigma = \{0,1\}$

- $0^* 1 0^* = \{ w : w$ contiene esattamente un '1' $\}$

- $\Sigma^* 1 \Sigma^* = \{ w : w$ contiene almeno un '1' $\}$.

- $\Sigma^* 001 \Sigma^* : \{ w : w$ contiene la sottostringa 001 $\}$.

Made with Goodnotes

- $(0 \cup \varepsilon)(1 \cup \varepsilon) = \{\varepsilon, 0, 1, 01\}$
- $1^* \emptyset = \emptyset$
- $\emptyset^* = \varepsilon$

CONVENZIONI

TEO $\mathcal{L}(re) = \mathcal{L}(DFA) = REG$.

DIM. Ci sono 2 osservazioni.

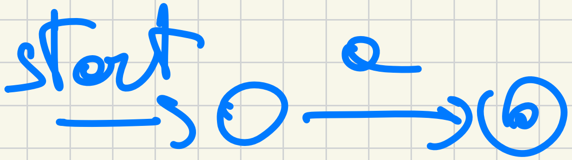
LEMMA $\mathcal{L}(re) \subseteq \mathcal{L}(DFA)$.

DIM. Data r costruisco DFA D_r tale che $L(r) = L(D_r)$.

Made with Goodnotes

CASO BASE:

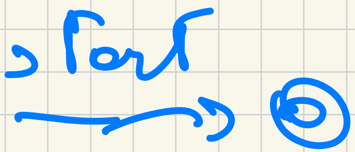
- $r = a \in \Sigma$: $D_r = (\{q_1, q_2\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_2\})$



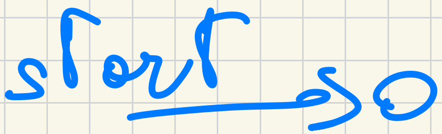
$$\delta(q_1, a) = \{q_2\}$$

$$\delta(q, b) = \emptyset \qquad q \neq q_1,\ b \neq a$$

- $r = \varepsilon$



- $r = \emptyset$



Made with Goodnotes

CASO INDUTTIVO:

- $r = r_1 \cup r_2$ per induzione

$\exists$ DFA D_1, D_2 t.c. $L(r_1) = L(D_1)$

$L(r_2) = L(D_2)$

$\exists$ DFA D t.c. $L(D) = L(r_1) \cup L(r_2)$.

- $r = r_1 \circ r_2$ per induzione

$\exists$ DFA D_1, D_2 t.c. come sopra.

$\exists$ DFA D t.c. $L(D) = L(r_1) \circ L(r_2)$

Made with Goodnotes

- $r = r_1^*$ per induzione

$\exists$ DFA D_1 t.c. $L(D_1) = L(r_1)$

$\exists$ DFA D t.c. $L(D) = L(r_1)^*$ ■

LEMMA. $\mathcal{L}(DFA) \subseteq \mathcal{R}(re)$.

DIM. Sia $L \in \mathcal{L}(DFA)$, allora esiste un NFA t.c. $L(N) = L$. Devo derivare espressione regolare.
Definiamo NFA generalizzato con etichette espressioni regolari.

Made with Goodnotes

Ha una forma canonica:

- Singolo stato iniziale con archi uscenti verso tutti gli altri stati, ma no archi entranti.
- Singolo stato finale, solo archi entranti.
- Per ogni coppia di stati c'è un arco

Più precisamente GNFA $G = (Q, \Sigma, \delta, q_{start}, q_{acc})$ dove $\delta : Q \setminus \{q_{acc}\} \times Q \setminus \{q_{start}\} \to R \equiv re(\Sigma)$

Dato D DFA t.c. $L(D) = L$ lo

Trasformo in GNFA G in forma canonica aggiungendo eventualmente q_{start} e q_{acc} usando gli ε-archi, e aggiungendo gli archi mancanti (con etichetta $\emptyset$ se non presenti in D).

Converto G in GNFA equivalente rimuovendo uno stato.

CONVERT (G)

- Sia K il # di stati
- Se $K = 2$, G ha solo stati q_{start} e q_{acc} con arco con etichetta $R \in \mathcal{R}$

Riformo r.

- Se $K > 2$ scelgo $q_{rip} \in Q$ con $q_{rip} \neq q_{start}, q_{acc}$ e pongo

$$G' = (Q', \Sigma, \delta', q_{start}, q_{acc})$$

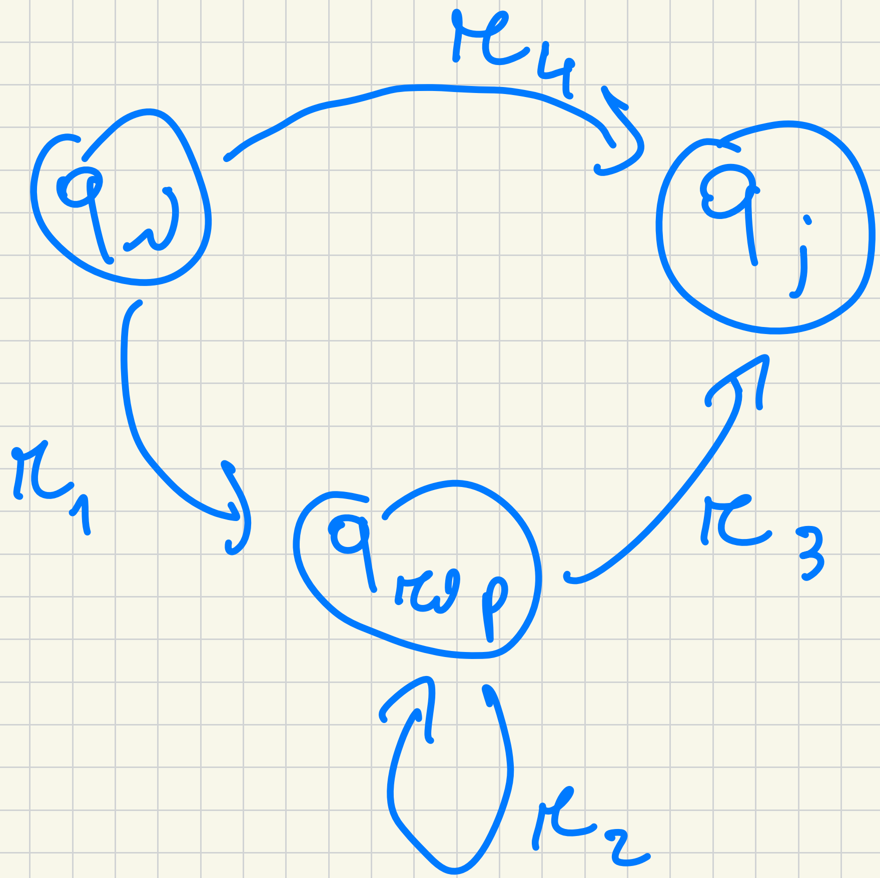
$$Q' = Q \setminus \{q_{rip}\}$$

$$\delta' : Q' \setminus \{q_{acc}\} \times Q' \setminus \{q_{start}\} \to R$$

Aggiorno le etichette $\forall\ q_i \in Q' \setminus \{q_{acc}\}$

$q_j \in Q' \setminus \{q_{start}\}$

Made with Goodnotes



$$\delta'(q_i, q_j) = (r_1)(r_2)^*(r_3) \cup (r_4)$$

$$r_1 = \delta(q_i, q_{rip})$$

$$r_2 = \delta(q_{rip}, q_{rip})$$

$$r_3 = \delta(q_{rip}, q_j)$$

$$r_4 = \delta(q_i, q_j)$$

Lancio CONVERT(G').