ESERCIZI

Dimostrare che

$L = \{ 0^n 1^n : n \geq 0 \}$ non è regolare.

Supponiamo lo sia, allora esiste p valore del PUMPING LEMMA. Basta far vedere che $\exists\, w \in L$ con $|w| \geq p$ t.c. PER OGNI scomposizione $w = xyz$ con $|xy| \leq p$ e $|y| > 0$ allora per qualche $i \geq 0$ $xy^iz \notin L$.

Prendo $w = 0^p 1^p \in L$ e $|w| = 2p > p$.

Siccome $|xy| \leq p$ allora xy è fatta di soli '0'. D'altra parte z contiene esattamente p '1'.

Made with Goodnotes

Per $i \geq 2$: la stringa $\hat{w} = x y^i z$
$$= 0^q 1^p$$

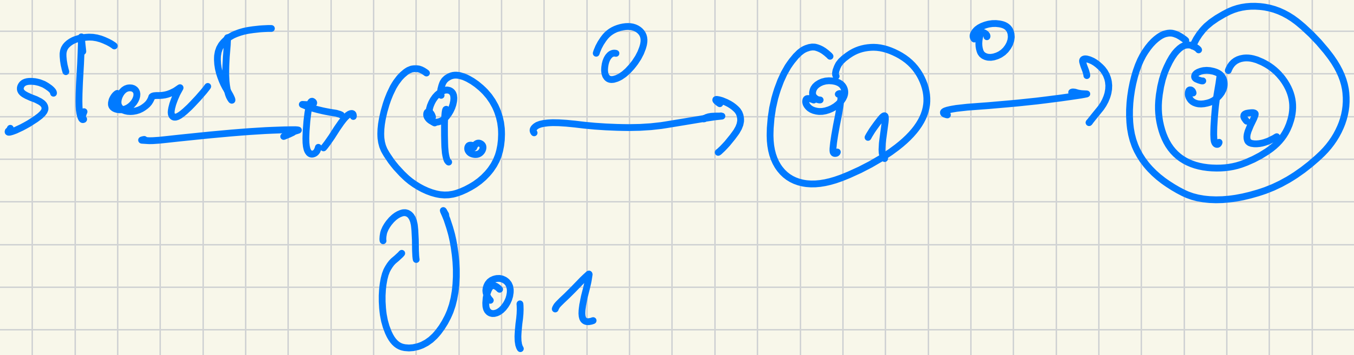
dove $q > p$, ovvero $\hat{w} \notin L$.

$$\underbrace{0 \cdot \cdots \cdot 0}_{x}\underbrace{\cdots 0}_{y}\underbrace{1 \cdots 1}_{z} \qquad \underbrace{0 \cdots 0}_{xy}\underbrace{0 \cdots 0 1 \cdots 1}_{z}$$

Made with Goodnotes

Costruire un NFA per il linguaggio:

$$L = \{ w \in \{0,1\}^* : w \text{ termina con } 00 \}$$



100

Corretto:

(i) $w \in L \Rightarrow D$ accetta w

(ii) Se D accetta $w \Rightarrow w \in L$

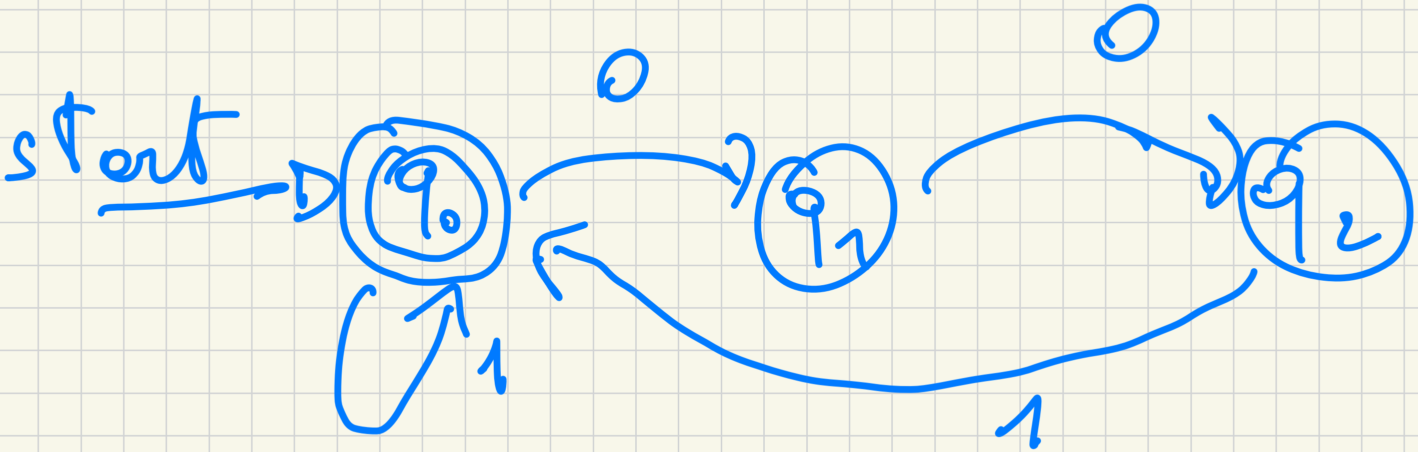
Made with Goodnotes

(i) Per induzione su $|w|$. Caso base è $w = 00$. Chiaramente D accetta 00.
Passo induttivo $w = w'00$ $w' \in \{0,1\}^*$
chiaramente D accetta w perché si trova in q_0 dopo aver letto w'.

(ii) Se D accetta w allora termina in q_2. O meglio, esiste un ramo di computazione che termina in q_2. Necessariamente in questo ramo l'automa è passato prima per q_0 e poi per q_1. Ovvero $w \in L$.

Sia $r = 1^*(001^+)^*$ dove $+$ significa "almeno un occorrenza". Costruire un DFA D t.c. $L(D) = L(r)$.

↳ con 3 stati.



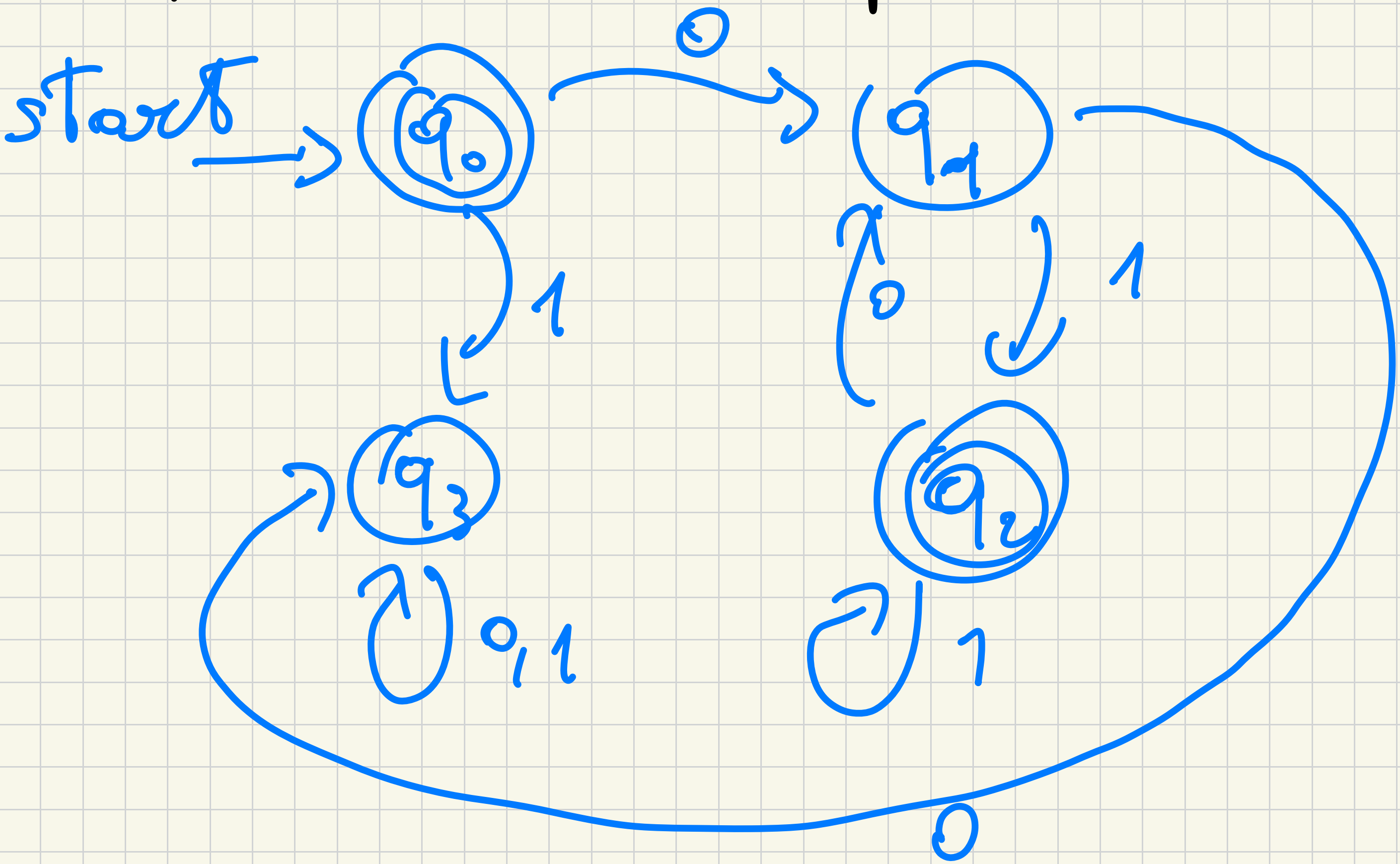
Per caso: Prova di correttezza.

Made with Goodnotes

Costruire un DFA per:

$$L = \{ w \in \{0,1\}^* : w \notin (01^+)^* \}$$

L'idea è usare la chiusura di REG rispetto al complemento "T".



Poi faccio il complemento.

Made with Goodnotes

Mostrare che $L = \{ w \in \{0,1\}^* : |w|_0 = |w|_1 \}$ non è regolare. Qui $|w|_0 = \#$ '0' in w

$|w|_1 = \#$ '1' in w.

Suppongo L è regolare. Per il PUMPING LEMMA $\exists\, p$ t.c. $\forall\, w \in L$ con $|w| \geq p$ valgono le condizioni (i), (ii) e (iii).

Mostro che $\exists\, w \in L$ con $|w| \geq p$ t.c. per ogni scomposizione $w = xyz$ con $|y| > 0$ e $|xy| \leq p$ la proprietà (i) non vale ($\exists\, i \geq 0 : xy^i z \notin L$).

Se prendessi $w = (01)^p \in L$ e $|w| > p$.

Made with Goodnotes

Però $\exists$ scomposizione $w = xyz$ per cui è tutto ok:

$$\underbrace{01}_{y}\,\underbrace{01\,01\cdots\cdots01}_{z}$$

$|x| = 0$; $x = \varepsilon$

$y = 01$; $z = (01)^{p-1}$

$\forall\, i \geq 0 : x y^i z \in L$

Provo con $w = 0^p 1^p$ t.c. $|w| = 2p > p$.

Adesso considero tutte le possibili scompo-sizioni $w = xyz$ t.c. $|y| > 0$ e $|xy| \leq p$.

$$\underbrace{00\cdots 0}_{x}\,\underbrace{0\cdots 0}_{y}\,\underbrace{1\cdots 1}_{z} \quad \Big| \quad \underbrace{0\cdots 0}_{x}\,\underbrace{0\cdots 0}_{y}\,\underbrace{0\cdots 01\cdots 1}_{z}$$

Made with Goodnotes

In entrambi i casi $i = 2$

$$\hat{w} = xy^2z \text{ è t.c. } |w|_0 = q > p = |w|_1$$

Mostrare che $L = \{ ww^R : w \in \{0,1\}^* \}$ non è regolare dove w^R è w ROVESCIATA.

Suppongo L regolare e procedo come sopra.

Scelgo $w = 0^p 1 1 0^p \in L$ e $|w| \geq p$.

Siccome $|xy| \leq p$ abbiamo che y è fatta di solo '0'. Quindi posso sempre scrivere:

$$w = 0^k 0^l 0^m 1 1 0^p \qquad x = 0^k \; ; \; k \geq 0.$$

$$z = 0^m 1 1 0^p \qquad y = 0^l \; ; \; l \geq 1$$

$$k + l + m = p$$

Made with Goodnotes

Prendo $i = 2$ e studio

$$xy^2z = 0^k 0^{2l} 0^m 110^p$$

dove $k + 2l + m > p \Rightarrow xy^2z \notin L$.

Mostrare che $L = \{ 1^{n^2} : n \geq 0 \}$ non è regolare. ($n^2 \in \mathbb{N}$.)

Procedo come al solito. Suppongo L regolare.

$w = 1^{p^2} \in L$ con $|w| \geq p$.

Considero tutte le possibili scomposizioni t.c.

$w = xyz$ con $|xy| \leq p$ e $|y| > 0$.

$$w = 1^k 1^l 1^{p^2 - k - l}$$

$x = 1^k$; $k \geq 0$

$y = 1^l$; $l \geq 1$

$$z = 1^{p^2-k-l}$$

Siccome $|xy| \leq p$, allora $k+l \leq p$.

Prova $i=2$: xy^2z

$$xy^2z = 1^k 1^{2l} 1^{p^2-k-l}$$

$$|xy^2z| = \cancel{k} + 2l + p^2 - \cancel{k} - l = p^2 + l$$

$$(p+1)^2 = p^2 + 2p + 1 \geq p^2 + 2(k+l) + 1$$

$$> p^2 + l$$

Ovvero $p^2 < |xy^2z| < (p+1)^2$

Made with Goodnotes

$\Longrightarrow xy^2z \notin L$.

Domanda: Se un linguaggio è regolare, lo sono tutti i suoi sottoinsiemi?.

No. Ad es. $L = \{0,1\}^*$ è regolare.

Ma $\{0^n 1^n : n \geq 0\} \subset \{0,1\}^*$.

Anche: $L = 1^*$ è regolare.

Ma $L' = \{1^{n^2} : n \geq 0\}$ non lo è.

Made with Goodnotes

GRAMMATICHE ACONTESTUALI (CFG)

Scopo: Estendere i modelli di computazione e classi di linguaggi non regolari.
Come vedremo le grammatiche corrispondono ad un automa più "potente". (PDA).
Hanno applicazioni ad es. nei linguaggi di programmazione (parser per i compilatori).
Cos'è una grammatica: È composta da una serie di produzioni o regole:

$$A \to 0A1 \qquad \Sigma = \{0, 1, \#\}$$
$$A \to B$$
$$B \to \#$$

Made with Goodnotes

Ciascuna regola contiene una cosiddetta VARIABILE seguita da '→' che a sua volta è seguita da una stringa composta da VARIABILI e/o TERMINALI.
Solitamente c'è una VARIABILE INIZIALE (la A nell'esempio).

A, B VARIABILI ; 0, 1, # TERMINALI

Usando grammatica G, posso generare stringhe come segue:

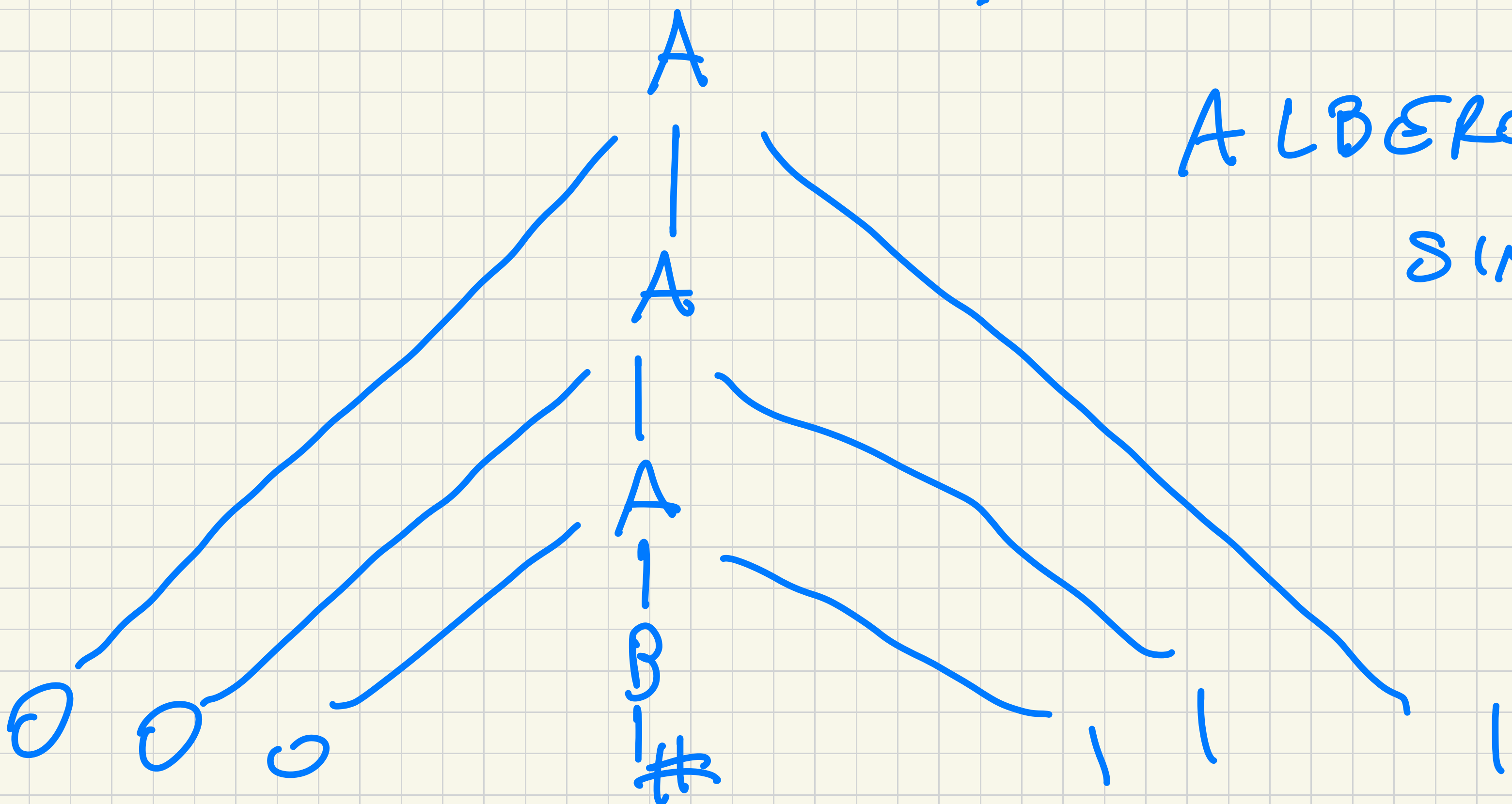
- Scrivo la var. iniziale
- la sostituisco usando una delle regole di G

Made with Goodnotes

- Ripeto fino a che non ottengo solo Terminali.

Esempio: La G di sopra genera 000#111.

$$A \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 00A11 \Rightarrow 000A111$$
$$\Rightarrow 000B111$$
$$\Rightarrow 000\#111$$



ALBERO SINTATTICO

Made with Goodnotes

Altro esempio:

$$E \to E + E$$

$$E \to E * E$$

$$E \to (E)$$

$$E \to 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \cdots \mid 9$$

$$\left(\begin{array}{lll} E \to 0 & \cdots\cdots & E \to 8 \\ E \to 1 & & E \to 9 \end{array} \right)$$

Genera $(3+4)*4$

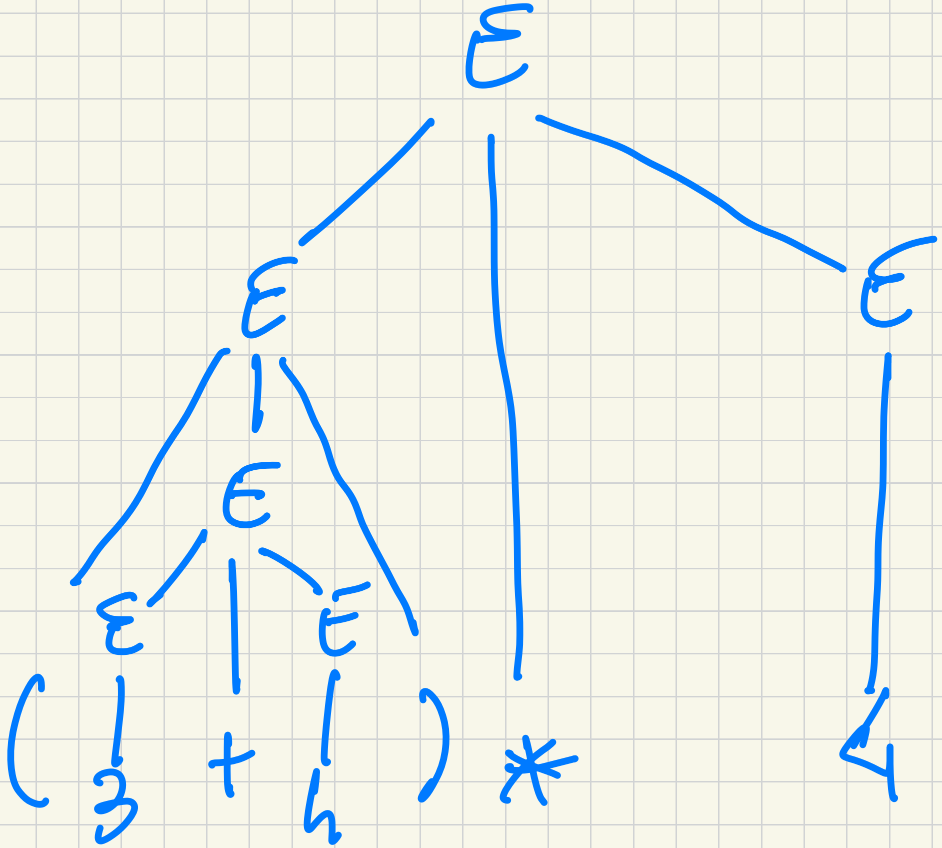
$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow (E) * E \Rightarrow (E+E) * E$$

$$\Rightarrow (E+E) * 4 \Rightarrow (3+E)*4$$

Made with Goodnotes

$\Rightarrow (3+4)*4$.

Ma non genera $(3+4+)*4$



Made with Goodnotes

DEF (CFG). Una CFG è $G = (V, \Sigma, R, S)$:

- V è insieme finito di VARIABILI
- Σ è insieme finito $(\Sigma \cap V = \emptyset)$ di TERMINALI
- R è insieme di REGOLE
- S è la VAR. INIZIALE.

Se $u, v, w \in \Sigma \cup V$ e $(A \Rightarrow w) \in R$
$A \in V$

uAv PRODUCE uwv $(uAv \Rightarrow uwv)$.

Made with Goodnotes

Diciamo anche che u deriva v ($u \overset{*}{\Rightarrow} v$) se

- $u = v$

- esiste una sequenza $u_1, \dots, u_k$ $k \geq 0$

$$u \Rightarrow u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_k \Rightarrow v.$$

Sia $G = (V, \Sigma, R, S)$ una CFG.

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* : S \overset{*}{\Rightarrow} w \} .$$

Made with Goodnotes