Distinguished Lectures:

- Oct. 13 : RICHARD STALLMAN.
  Orario : 4-6 PM ; AULA 1 MAGNA
  GEOLOGIA.

- Oct. 14 : 12 PM. VIRGINIA
  VASSILEVSKA WILLIAMS.
  AULA 101 - PALAZZINA D
  VIALE REGINA ELENA 295.

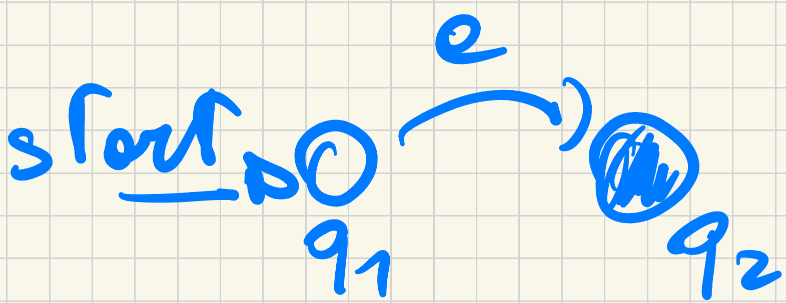
DIM. Sono due direzioni, la prima:

LEMMA $L(re) \subseteq REG$.

Data espressione regolare re, costruisco un NFA/DFA N_{re} t.c. $L(N_{re}) = L(re)$.
Per farlo, ci avvale la definizione ricorsiva che abbiamo considerato.

CASO BASE:

- $re = a$, $a \in \Sigma$

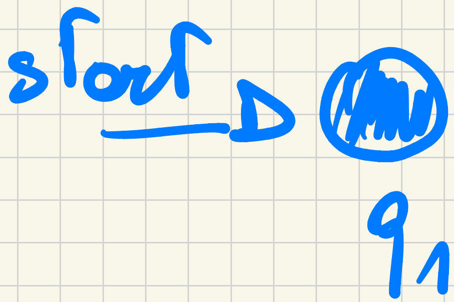


$$N_{re} = (\{q_1, q_2\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_2\})$$

$\delta(q_1, a) = q_2$

$\delta(q, b) = \emptyset \qquad q \neq q_1,\ b \neq a$

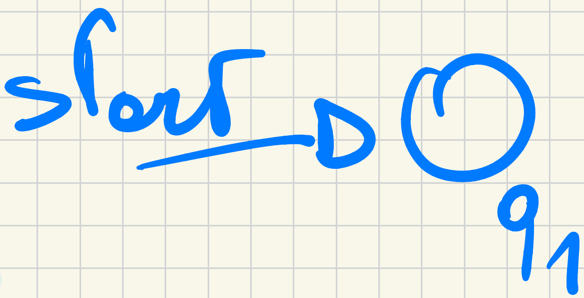
- $r = \varepsilon$



$N_r = (\{q_1\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_1\})$

$\delta(q_1, b) = \emptyset \quad \forall\ b \in \Sigma$

- $r = \emptyset$



$N_r = (\{q_1\}, \Sigma, \delta, q_1, \emptyset)$

$\delta(q_1, b) = \emptyset \quad \forall\ b \in \Sigma$

CASO INDUTTIVO :

- Se $r = R_1 \cup R_2$, per induzione $\exists\ M_1, M_2$ t.c. $L(M_1) = L(R_1)$

$$L(M_2) = L(R_2)$$

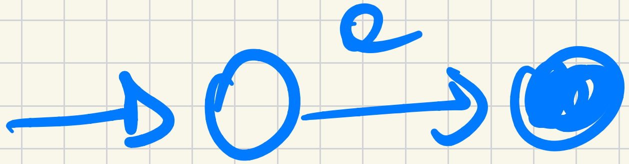
$\Rightarrow \exists\ M$ t.c. $L(M) = L(R_1) \cup L(R_2)$

(per CHIUSURA di REG)

Stesso discorso per "$\circ$" e "$*$". $\blacksquare$

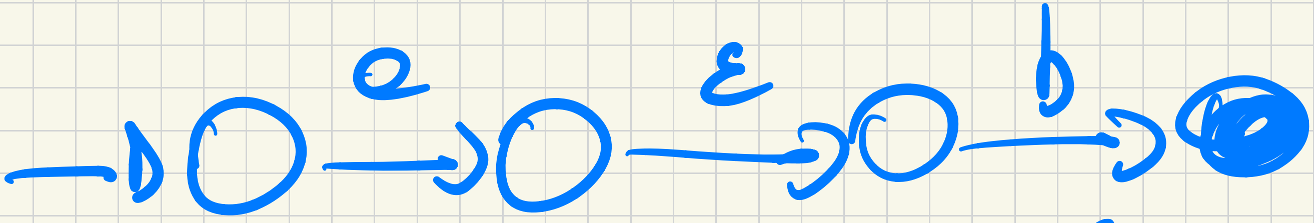
Es: $(ab \cup a)^*$. NFA corrispondente?

a :

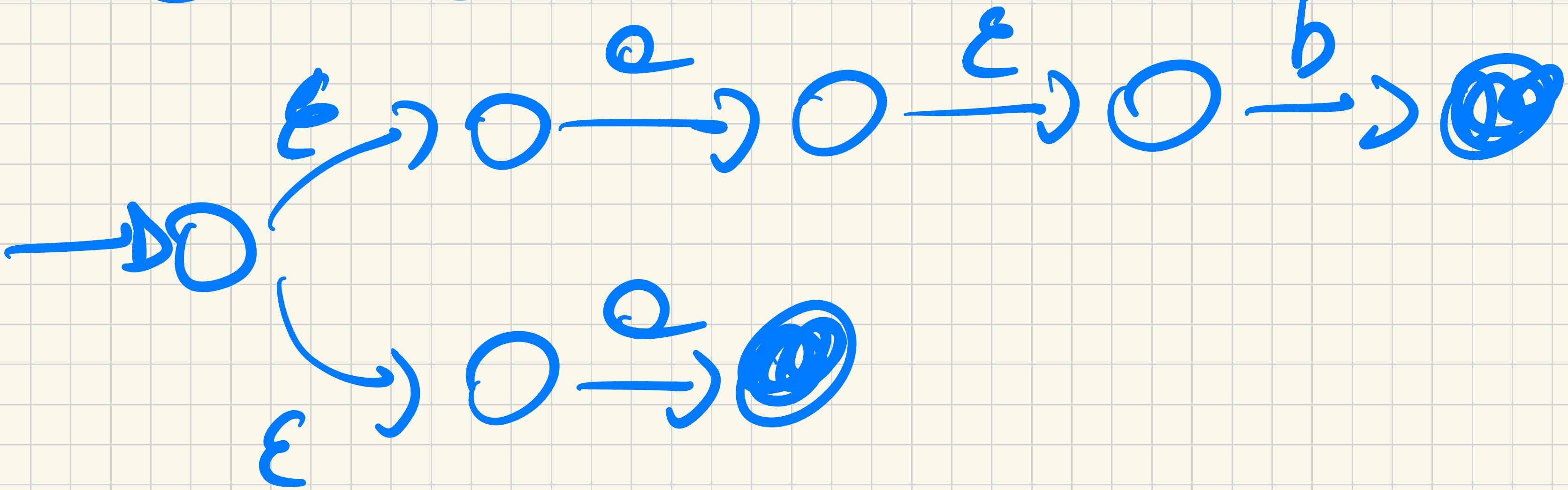


b :

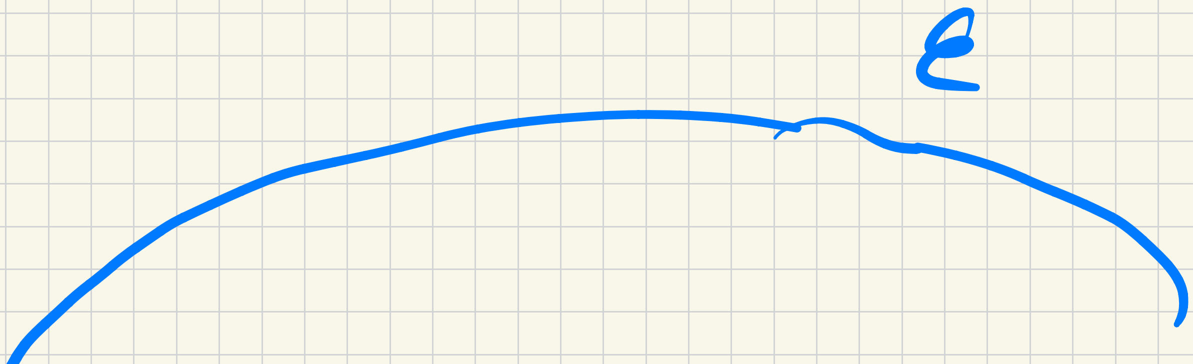
ab :

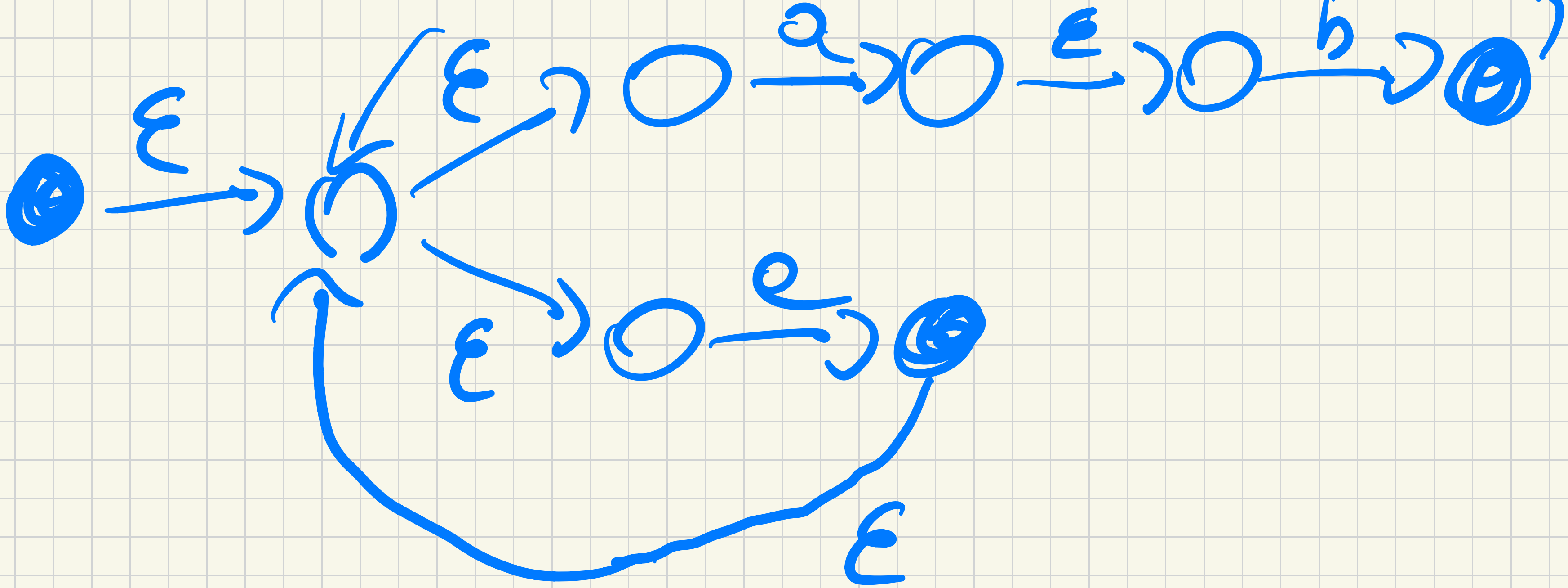


$ab \cup a$:



$(ab \cup a)^*$:




ε
ε
a
ε
b
ε
e
ε

LEMMA REG $\subseteq$ L(re).

Partiamo da NFA N per L $\in$ REG: L(N) = L. Per facilitare la conversione in espressione regolare introduciamo l'NFA GENERALIZZATO (GNFA): le etichette degli archi saranno espressioni regolari. Inoltre assumiamo (wlog) che il GNFA sia in forma CANONICA:

- lo stato iniziale: ha solo archi

USCENTI verso tutti gli altri stati -

- lo stato finale: ha solo archi ENTRANTI

- Eccetto stato finale e iniziale c'è arco per ogni coppia di stati.

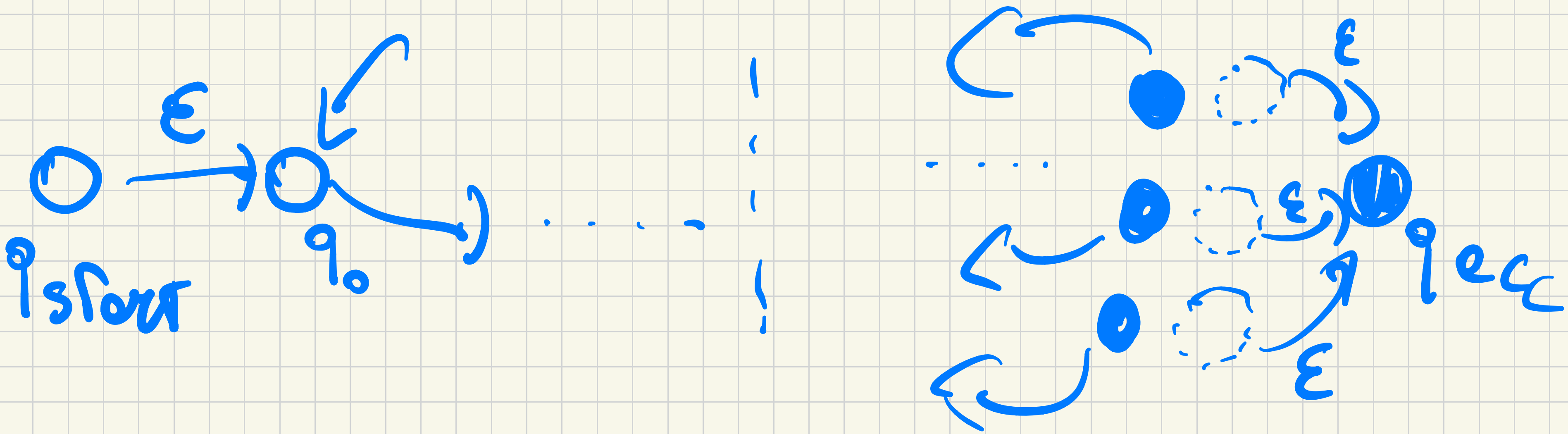
In pratica: $G = (Q, \Sigma, \delta, q_{start}, q_{acc})$

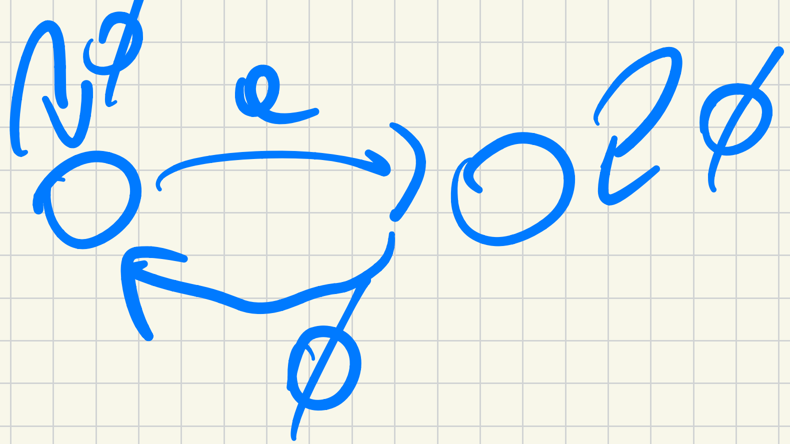
$$\delta : Q \setminus \{q_{acc}\} \times Q \setminus \{q_{start}\} \longrightarrow \mathcal{R} = re(\Sigma)$$

$R \equiv$ insieme espressioni regolari su Σ.

Perché la forma canonica è WLOG?

Posso sempre aggiungere: q_{start}, q_{acc} e gli archi mancanti fra ogni coppia di stati.





Siamo pronti per convertire G in espressione regolare.

CONVERT(G) :

- Sia k = # stati in G.
- Se $k = 2$, G avrà solo 2 stati q_{start}, q_{acc} e un singolo

arco con etichette $R \in \mathcal{R}$. Output R.

- Se $k > 2$, scelgo $q_{rip} \in Q$

$q_{rip} \neq q_{start}, q_{acc}$

e definisco $G' = (Q', \Sigma, \delta', q_{start}, q_{acc})$

$Q' = Q \setminus \{q_{rip}\}$.

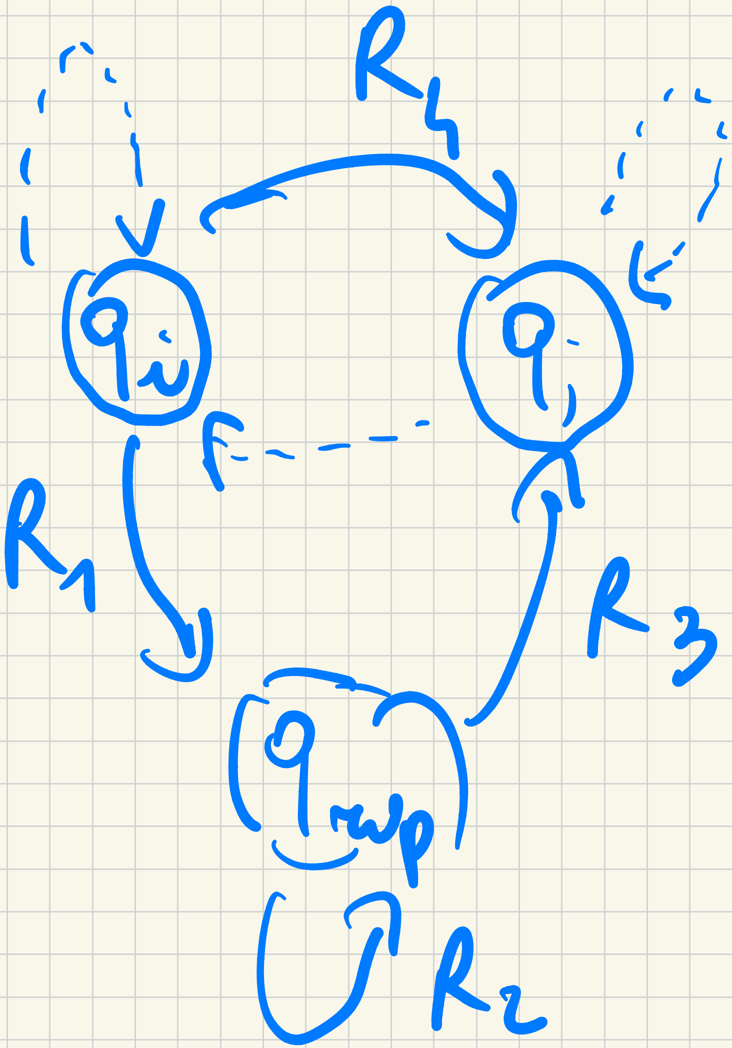
Le δ'? $\delta' : Q' \setminus \{q_{acc}\} \times Q' \setminus \{q_{start}\}$

$\longrightarrow \mathcal{R}$

Made with Goodnotes

$$\forall \; q_i \in Q' \setminus \{q_{acc}\}, \; q_j \in Q' \setminus \{q_{start}\}$$

$$\delta'(q_i, q_j) = (R_1)(R_2)^*(R_3) \cup R_4$$



$$R_1 = \delta(q_i, q_{rip})$$

$$R_2 = \delta(q_{rip}, q_{rip})$$

$$R_3 = \delta(q_{rip}, q_j)$$

$$R_4 = \delta(q_i, q_j)$$

Lemma CONVERT (G').

Per concludere: Devo dimostrare che CONVERT (G) è equivalente a G. Per $k = 2$ è sicuramente vero (banale);

L'espressione regolare R descrive tutte le stringhe che portano G da q_{start} a q_{acc}.

Suppongo vero per $k-1$ stati e faccio vedere che è vero per k stati. Basta mostrare che $L(G) = L(G')$, così

La prova segue dall'ipotesi induttiva siccome # stati di G' è $k-1$.

Ma se G accetta w, allora $\exists$ ramo di computazione t.c. G percorre gli stati

$$q_{start}, q_1, \dots, q_{acc}.$$

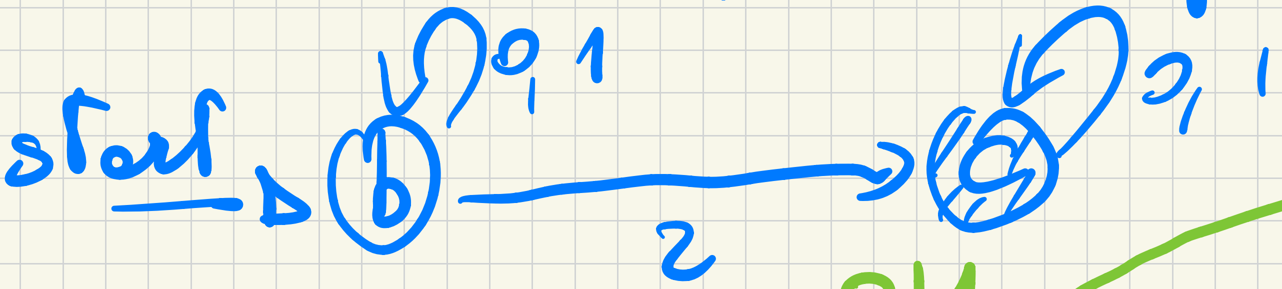
Se la sequenza non contiene q_{rip}, allora banalmente $L(G) = L(G')$ perché le nuove espressioni regolari contengono le vecchie come unione. Se c'è q_{rip}, avrò ad es.

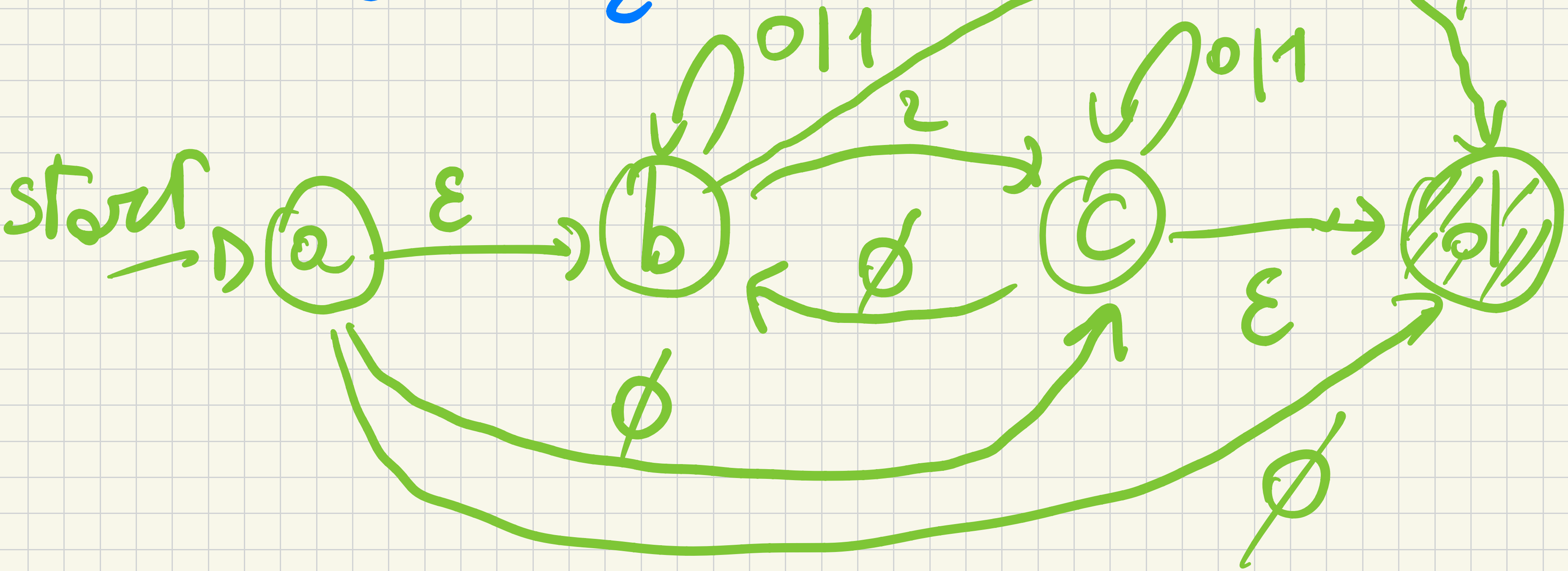
$$q_1 \; q_{rip} \; q_2$$

e quindi una nuova sequenza di stati per G'. Ma gli stati collezionati a grup (q_1, q_2) di G' hanno arco che tiene conto di tutti i modi per andare da q_1 e q_2 direttamente o passando per grup.

Quindi ancora $L(G) = L(G')$ $\blacksquare$

Es: Trovare espressione regolare associata a:

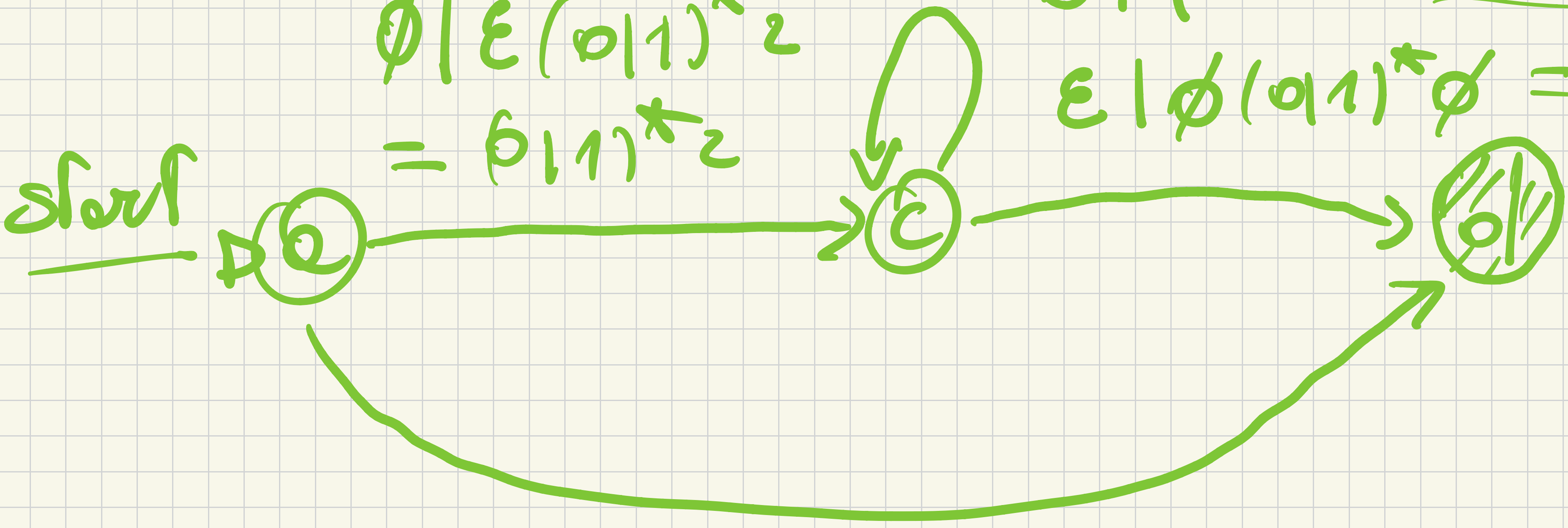




GNFA

$(0|1)|\emptyset(0|1)^*2$ Rimuovo b

$= 0|1$



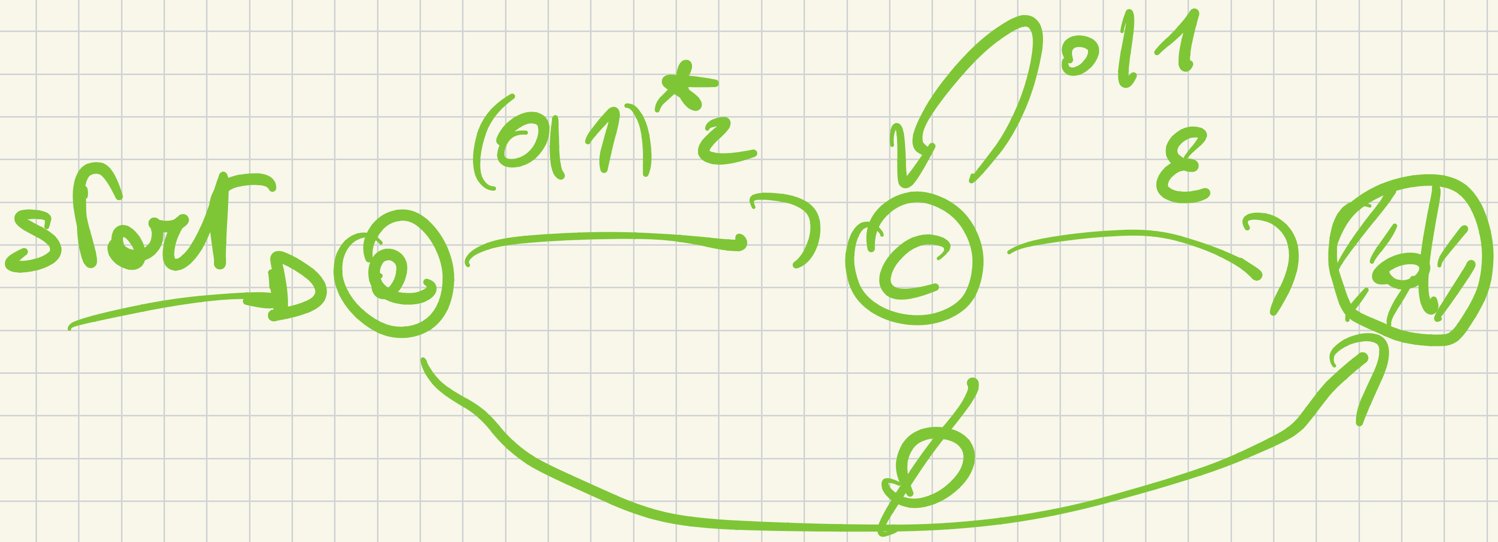
$\emptyset|\varepsilon(0|1)^*2$

$= (0|1)^*2$

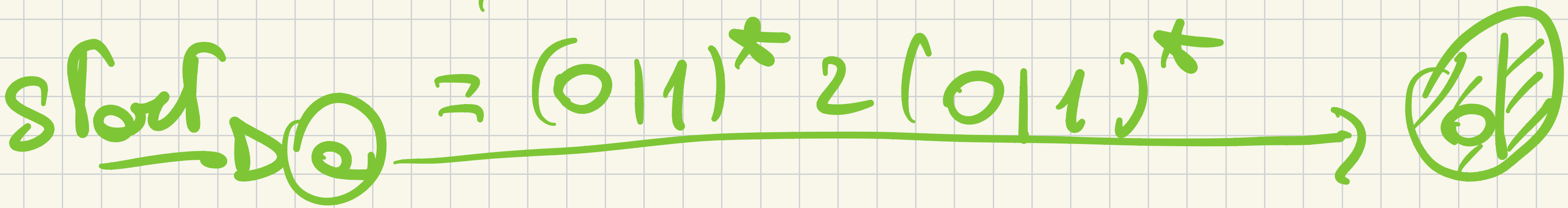
$\varepsilon|\emptyset(0|1)^*\emptyset = \varepsilon$

$\emptyset|\varepsilon(0|1)^*\emptyset = \emptyset$

Rimuovo c



$$\emptyset \mid (0|1)^*2(0|1)^*\varepsilon$$

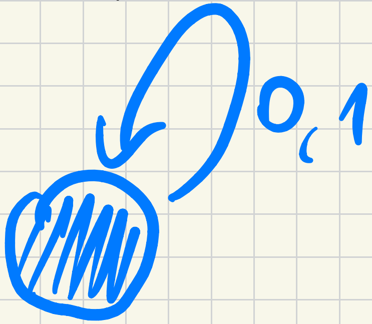


$$r = (0|1)^*2(0|1)^*$$

PUMPING LEMMA

Tutti i linguaggi sono regolari? NO.

Es.: $L = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ non è REGOLARE.



$0 \notin L$

$001 \notin L$

Vedremo la prossima volta che il PUMPING LEMMA è un modo per dimostrare che un linguaggio NON è REGOLARE.