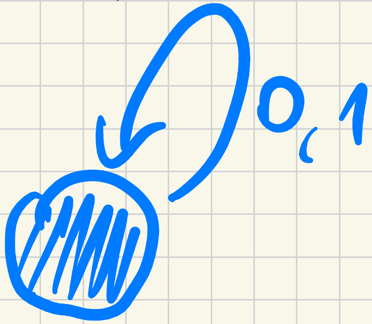
PUMPING LEMMA

Tutti i linguaggi sono regolari? NO.

Es.: $L = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ non è REGOLARE.



$0 \notin L$

$001 \notin L$

Vedremo la prossima volta che il PUMPING LEMMA è un modo per dimostrare che un linguaggio NON è REGOLARE.

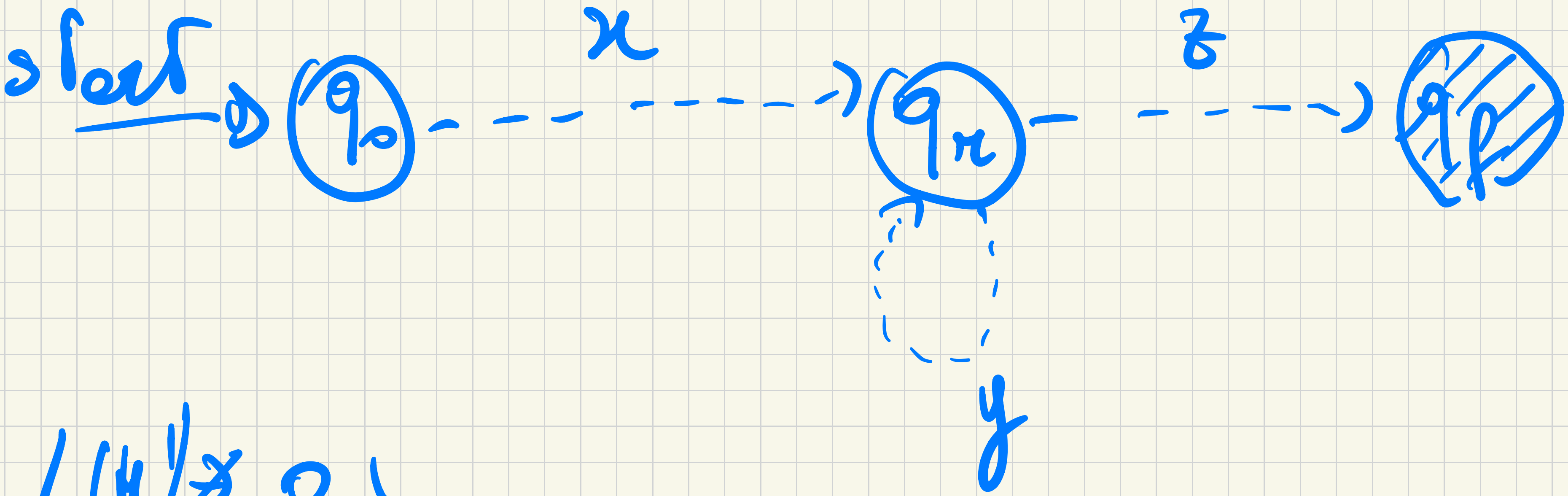
<u>TEO</u> (PUMPING LEMMA). Se L è regolare, allora esiste un valore p t.c., presa $w \in L$ con $|w| \geq p$, allora w può essere scomposta in $w = xyz$ in modo che:

(i) $\forall i \geq 0$, $xy^iz \in L$

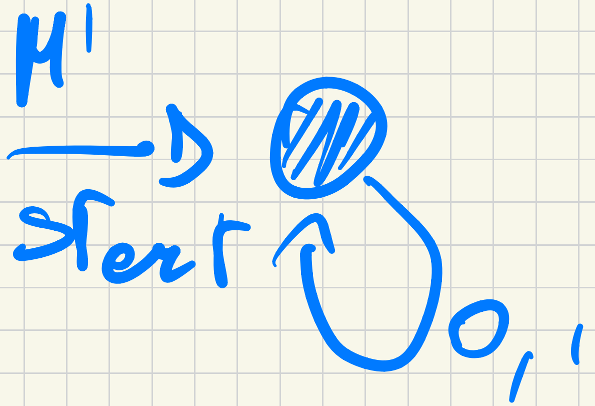
(ii) $|y| > 0$

(iii) $|xy| \leq p$.

Intuizione: $p = \#$ stati automa M t.c.
$L(M) = L$. Supponiamo $|w| \geq p$.



$L(M') \not\ni 01$



$001 \in L(M')$

DIM. Sia $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ t.c. $L(M) = L$ e sia $p = |Q|$. Consideriamo $w = w_1 w_2 \dots w_n$ t.c. $n \geq p$. Sia $r_1, \dots, r_{n+1}$ la sequenza di stati attraversati da M su input w ($r_1 = q_1$ e $r_{n+1} \in F$). In altre parole:

$$\delta(r_i, w_i) = r_{i+1}$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Ovviamente $n+1 \geq p+1$.

Per il PHP nella sequenza considerata c'è almeno uno stato che si ripete. Sia questo r_i nella prima apparizione e r_l nella seconda ($i \neq l$). Ovviamente abbiamo $l \leq p+1$ perché r_l si presenta tra le prime $p+1$ posizioni nella sequenza che inizia con r_1.

Scompongo la stringa: $w = xyz$. Pongo

$$x = w_1 \dots w_{i-1} \; ; \quad y = w_i \dots w_{l-1}$$

$$z = w_l \dots w_n .$$

Siccome x porta M da $r_1 = q_1$ ed r_i, y porta M da r_i ed $r_l = r_i$, z porta M da $r_i = r_l$ e $r_{n+1} \in F$ allora: $\forall i \geq 0 \quad xy^i z \in L(M)$.

Siccome $i \neq l$, allora $|y| > 0$.

Infine $l \leq p+1$, allora $|xy| = l-1 \leq p$ ∎

ESERCIZI

$L = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ non è REGOLARE.

Scelgo $w = 0^p 1^p$ dove p è il valore di PUMPING che assumiamo per contraddizione. Abbiamo $|w| \geq p$. Siccome $w = 0^p 1^p$ per qualsiasi scomposizione $w = xyz$ t.c. $|xy| \leq p$, y è fatto di solo "0".

$$w = \underbrace{0 \cdots}_{x}\underbrace{\cdots 0}_{y}\,1 \cdots 1$$

$\Rightarrow$ Per $i \geq 2$; $\hat{w} = x y^i z$

$= 0^q 1^p$

t.c. $q > p$.

Questo contraddice il PUMPING LEMMA.

$L = \{ w \in \{0,1\}^* : \#_0 w = \#_1 w \}$

ovvero w ha uguale # di "0" e "1".

Non è regolare. Suppongo lo sia: $\exists p$ t.c. vale PUMPING LEMMA. Devo scegliere $w \in L$; ad es. provo $w = (01)^p$ con $|w| = 2p \geq p$. Non va bene:

$\underbrace{01}_{y}\,\underbrace{01\,01\,\ldots\,01}_{z}$ $\qquad x = \varepsilon$

Proviamo invece $w = 0^p 1^p \in L$ e $|w| = 2p$.
Adesso provo a scomporre $w = xyz$ in tutti i modi legali: $|xy| \le p$ e $|y| > 0$.
Siccome $|xy| \le p$, allora y è fatta solo di "0". In pratica:

1) $\underbrace{0 \cdots 0}_{x}\underbrace{0 \cdots 0}_{y}\underbrace{1 \cdots 1}_{z}$

2) $\underbrace{0 \cdots}_{x}\underbrace{\cdots 0}_{y}\underbrace{0 \cdots 0 1 \cdots 1}_{z}$

Ancora una volta in ogni caso $xy^2z \notin L$.

Più precisamente: Ci sono due casi.

1) $|y| = k > 0$; $k \le p$; $|x| = p - k$

$|z| = p$

Tuttavia $|xy^2z| = (p-k) + 2k + p = 2p + k$

ma il $\#_0$ è $(p-k) + 2k = p + k$

$\#_1$ è sempre $p < p + k$

2) $|y| = k > 0$; $|z| = p + l$; $l > 0$.

$|x| = p - k - l$

Tuttavia:

$$|xy^2z| = (p-k-\ell) + 2k + p + \ell = 2p + k$$

$$\#_0 = (p-k-\ell) + 2k + \ell$$

$$= p + k$$

$$\#_1 = p < p + k$$