ESERCIZI.

*) $L = \{0^n 1^n 2^n : n \geq 1\}$ non è un CFL.

Suppongo lo sia; $\exists\, p$ t.c. $\forall\, w \in L$ con $|w| \geq p$ valgono le condizioni del PL.

Prendo $w = 0^p 1^p 2^p \in L$ e $|W| = 3p > p$.

Devo considerare tutte le scomposizioni del tipo $w = uvxyz$ con $|vxy| \leq p$

$|vy| > 0$

$$W = uvxyz$$

$$\underbrace{00\cdots00}_{p}\;\underbrace{11\cdots11}_{p}\;\underbrace{22\cdots22}_{p}$$

Questo significa che vxy contiene al più 2 simboli su 3 ovvero vxy è fatto da soli 0, o da soli 1 o da soli 2 oppure una combinazione di 01 o di 12. Consideriamo $i=0$:

$\hat{w} = uv^0xy^0z$

Siccome vxy è non vuota e contiene al più due simboli

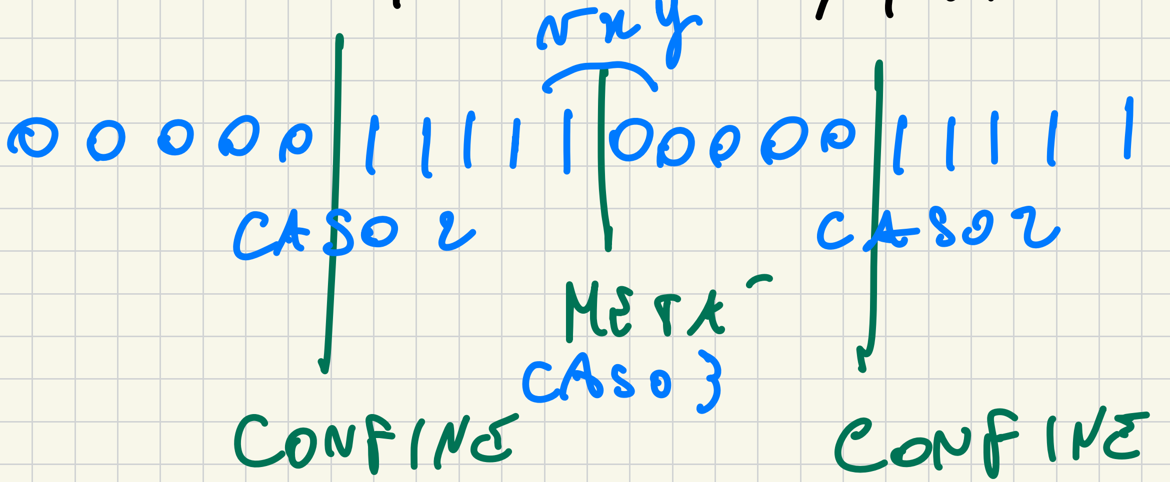
$\Rightarrow \hat{w} \notin L$ (non contiene lo stesso numero di 0, 1, 2).

*) $L = \{ww : w \in \{0,1\}^*\}$ non è CFL.

$\underbrace{01}_{w}\underbrace{01}_{w} \in L$

Per assurdo: sia L un CFL vale il PL.

Prendo $w = 0^p 1^p 0^p 1^p$, $|w| = 4p$.



vxy

$|vy| > 0$

Considero tutti i modi di scomporre

$$w = uvxyz \quad \text{con } |vxy| \le p, \ |vy| > 0$$

<u>CASO 1</u>: vxy non oltrepassa i confini e nemmeno il mezzo. Ovvero vxy consiste

o di solo 0 o di soli 1 e dunque:

$$\hat{w} = u v^2 x y^2 z \notin L$$

<u>CASO 2</u>: vxy oltrepassa confine a SX (DX).
Però non oltrepassa il mezzo. Se scelgo $i=0$

$$\hat{w} = u v^0 x y^0 z$$

$000 \longrightarrow 11\,000000\,11111$ (al posto di p)

La metà si sposta a DX ma la sotto-stringa di DX finisce con 1 mentre la sottostringa di SX finirà con 0.

$0\,0\,0\,0\,\underbrace{0}_{vxy}\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1$

$0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,0 \mid 0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1$

METÀ

<u>CASO 3</u>: vxy è a cavallo del mezzo, ma non oltrepassa confini. Considero $i=0$:

$$\hat{w} = uv^0xy^0z$$

$0\,0\,0\,0\,0\,\underbrace{\dots}_{<p}\;\underbrace{\dots}_{<p}\,1\,1\,1\,1\,1$

$\Rightarrow$ la $\hat{w}$ ha la forma $0^p1^i0^j1^p$ e $i \neq p$ oppure $j \neq p$

*) Scrivere grammatiche per:

$$L_1 = \{ 0^n 1^n 2^i : n \geq 0 ; i \geq 0 \}$$

$$L_2 = \{ 0^k 1^n 2^n : k \geq 0 ; n \geq 0 \}$$

Trucco: concatenazione:

$$G_1 = (S_1, \dots) \qquad G_2 = (S_2, \dots)$$

$$S \to S_1 S_2$$

$$S_1 \to \dots$$

$$S_2 \to \dots$$

G_1 : $S \to S_1 S_2$ | G_2 : $S \to S_1 S_2$

$S_1 \to 0 S_1 1 \mid \varepsilon$ | $S_1 \to 0 S_1 \mid \varepsilon$

$S_2 \to 2 S_2 \mid \varepsilon$ | $S_2 \to 1 S_2 2 \mid \varepsilon$

Notare che:

$$L = L_1 \cap L_2 = \{0^n 1^n 2^n : n \geq 0\}.$$

Siccome L non è CFL, le CFG non sono chiuse per $\cap$.

Complemento? No. È immediato:

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

*) $L = \{a,b\}^* \setminus \{ww : w \in \{a,b\}^*\}$ è CFL

($\overline{L} = \{ww : w \in \{a,b\}^*\}$ non è CFL.)

Cos'è in L? Tutte le stringhe di lunghezza dispari e tutte quelle di lunghezza pari ma non della forma ww.

$S \to A \mid B \mid AB \mid BA$

$A \to a \mid aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb$

$B \to b \mid aBa \mid aBb \mid bBa \mid bBb$

Vediamo la correttezza. Lo facciamo solo per le stringhe di lunghezza pari, perché la grammatica genera tutte le stringhe di lunghezza dispari.

($\Longrightarrow$) Se $x \in L$, allora $S \overset{*}{\Rightarrow} x$. Mostro che posso ✓ scrivere $x = uv$ con $|u|, |v|$ dispari e u, v con diversa lettera centrale.

Vediamo perché: se $x \in L$, allora $\exists\, i$ t.c. $x_i \neq x_{i+n/2}$ dove $|x| = n$ (pari). Costruisco u e v: $u = x_1 \dots x_{2i-1}$ e $v = x_{2i} \dots x_n$

$$x = \overbrace{aa\underbrace{b}_{x_i}a}^{u} \mid a\,\overbrace{a\underbrace{a}_{x_{n/2+i}}a}^{v} \qquad S \to \underbrace{B}_{u}\,\underbrace{A}_{v}$$

($\Leftarrow$) Se $S \overset{*}{\Rightarrow} x$, allora $x \in L$.
Siccome $|x|$ è pari per forza è generato usando $S \to AB$ oppure $S \to BA$.
Supponiamo $S \to AB$ ed $x = uv$ dove $A \overset{*}{\Rightarrow} u$ e $B \overset{*}{\Rightarrow} v$ con $u \neq v$ perché la lettera al centro è diversa.
Sia l la lunghezza di u: $|u| = l$; $|v| = n - l$
la lettera centrale di u è $u_{(l+1)/2}$ e quella di v $v_{(n-l+1)/2}$ t.c.

$$u_{(l+1)/2} \neq v_{(n-l+1)/2}$$

$$x = uv$$

$$x_{(l+1)/2} = u_{(l+1)/2} \neq v_{(n-l+1)/2}$$

$$= x_{(n-l+1)/2+l}$$

$$= x_{(n+l+1)/2}$$

Se $x = ww'$ con $|w| = |w'|$ avremo che:

$$\frac{n}{2} + \frac{(l+1)}{2}$$

$$w_{(l+1)/2} = x_{(l+1)/2}$$

$$\neq x_{(n+l+1)/2} = w'_{(l+1)/2}$$

$\Rightarrow w \neq w' \Rightarrow x \in L.$

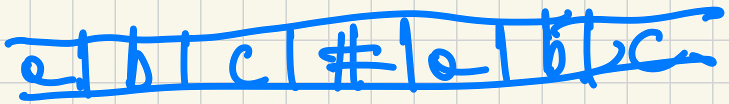
CALCOLABILITÀ

Estendiamo il nostro modello di calcolo.
La MACCHINA DI TURING (TM) introdotta nel 1936 da Alan Turing. Automa con memoria illimitata. Corrisponde ad una astrazione semplice dei moderni computer.
Caratteristiche:
-) Nastro di lavoro (memoria) di lunghezza infinita.
-) Testina di lettura che si sposta a DX

oppure a sx.

-) Ci sono anche stati di accettazione e rifiuto. Hanno effetto immediato. Può andare in loop.

<u>Es</u>: $L = \{ w \# w : w \in \{0,1\}^* \}$



Es. La TM può leggere a e muovere a Dx fino al primo carattere dopo # e controllare sia a. Se no RIFIUTA. Altrimenti rimpiazza a con \$ e muove a Sx fino a b, etc..

Made with Goodnotes

DEF (TM). Una TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ dove Q, Σ, Γ sono insiemi finiti e:

- Q è insieme STATI
- Σ è alfabeto INPUT $(\sqcup \notin \Sigma)$
- Γ è alfabeto NASTRO $(\Sigma \subseteq \Gamma$, $\sqcup \in \Gamma)$
- $\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
- $q_0 \in Q$ STATO INIZIALE
- $q_{acc} \in Q$ STATO ACCETTANTE

- $q_{rej} \in Q$ STATO DI RIFIUTO

Configurazione iniziale: l'input $w \in \Sigma^*$ è contenuto nel nastro seguito da $\sqcup$:

$$w_1 \mid w_2 \mid \dots \mid w_n \mid \sqcup$$

NASTRO

TESTINA

La TM M calcola seguendo le regole in δ.

Configurazione: contenuto nastro, posizione testina e stato. Notazione:

$$u\,q\,a\,v$$