

Dim. Se  $A_{p,q} \xRightarrow{*} x$  allora  $x$  parte PDA  
da  $p$  e  $q$  con pila vuota.

Per indurre su  $\#$  passi derivare  $x$ :

\*1) 1 PASSO: Unica regola possibile è  $A_{pp} \rightarrow \epsilon$   
e  $\epsilon$  parte PDA da  $p = p$  con pila vuota.

\*2) Sino vero per  $\#$  PASSI  $= K$  e lo dimostro  
per  $\#$  PASSI  $= K+1$ . Due casi:

1)  $A_{p,q} \rightarrow a A_{rs} b$ . Allora  $x = a y b$  dove

$A_{rs} \Rightarrow y$  in  $K$  passi. Allora PDA su  $y$  va  
da  $r$  e  $s$  con pila vuota. Per costruzione di  $G$

PDA su input a parte de  $p$  e  $\pi$  inserendo u su parte.  
 Quando ops over lefts y rimane u nella parte e  
 PDA fa pop su u leggendo b e passando de seq.

2)  $A_{p,q} \rightarrow A_{p,\pi} A_{\pi,q}$ . Sive  $x = yz$  dove

$A_{p,\pi} \Rightarrow y$  e  $A_{\pi,q} \Rightarrow z$  un d primi  $x$  passu.

Per qualunque PDA su  $y$  ve che  $p$  ed  $\pi$   
 con parte vuota e su  $z$  ve che  $\pi$  e  $q$  con  
 parte vuota. Quando su  $x$ , ve che  $p$  e  $q$   
 con parte vuota.

D'altra parte: Se  $n$  parte PDA da  $p$   
e  $q$  con pile vuote, allora  $A_{pq} \Rightarrow \kappa$ .

Indichiamo su  $\#$  PASSI del PDA.

\* ) BASE:  $\# \text{ PASSI} = 0$  le computazioni  
iniziali e terminano stesso stato, ovvero  $\kappa = \epsilon$ .  
Infatti  $G$  contiene  $A_{pp} \rightarrow \epsilon$ .

\* ) Sui vero per  $\# \text{ PASSI} = k$  e suppongo  
 $n$  parte PDA da  $p$  e  $q$  in  $k+1$  PASSI.  
con pile vuote. Due casi:

1) Poiché  $S_N$  è un sottoinsieme di  $M$ . Sui  $\pi$  lo stato relativo. Le computazioni che  $p$  e  $q$  e che  $\pi$  e  $q$  richiedono  $\leq k$  passi. Sui  $x = yz$ , per induzione:  $A_{p\pi} \stackrel{*}{\Rightarrow} y$  e  $A_{\pi q} \stackrel{*}{\Rightarrow} z$ . Quindi  $A_{pq} \stackrel{*}{\Rightarrow} x$  tramite regola  $A_{pq} \rightarrow A_{p\pi} A_{\pi q}$ .

2) Poiché  $S_N$  è un sottoinsieme di  $\Gamma$ . Sui  $\pi \in \Gamma$  simboli relativi; Sui e  $p$  non corre

e b l'ultimo. Sia  $\pi$  lo stato dopo

prima mossa e  $s$  stato prima ultima mossa.

Ma allora  $\exists (p, a, \varepsilon) \ni (\pi, u)$  e

$$\exists (s, b, u) \ni (q, \varepsilon)$$

$\Rightarrow$  C'è la regola  $A_{pq} \rightarrow a A_{rs} b$

Sia  $\pi = a y b$ . La computazione su

y richiede  $k+1-2 = k-1$  passi e

per tanto  $A_{rs} \stackrel{*}{\Rightarrow} y$ ; ma allora  $A_{pq} \stackrel{*}{\Rightarrow} \pi$

# PUMPING LEMMA

Come per un DFA, non tutti i linguaggi sono ACONTESSTUALI. Esempio:

$$L = \{ 0^m 1^m 2^m : m \geq 1 \}$$

Teo Se  $L \in CFL$  esiste  $p$  tale che se  $w \in L$  e  $|w| \geq p$  allora  $w = uvxyz$  tale che:

$$(i) \quad \forall i \geq 0, \quad u v^i x y^i z \in L$$

$$(ii) \quad |vy| > 0$$

$$(222) \quad |Nuy| \leq p.$$

DIM. Mostriamo che CFG, wlog assumo  
 $G$  in CNF. L'albero di derivazione  $i$   
 numero, inoltre:

LEMMA Ogni albero di derivazione in  $G$   
 il cui cammino <sup>più lungo</sup> Vocabole lunghezza  $i$ , genera  
 una stringa lunga al più  $\leq 2^{i-1}$ .

Lo dimostreremo per induzione. Che lo uso.

Sia  $m = \#V$  e posto  $p = 2^m$ . Sia

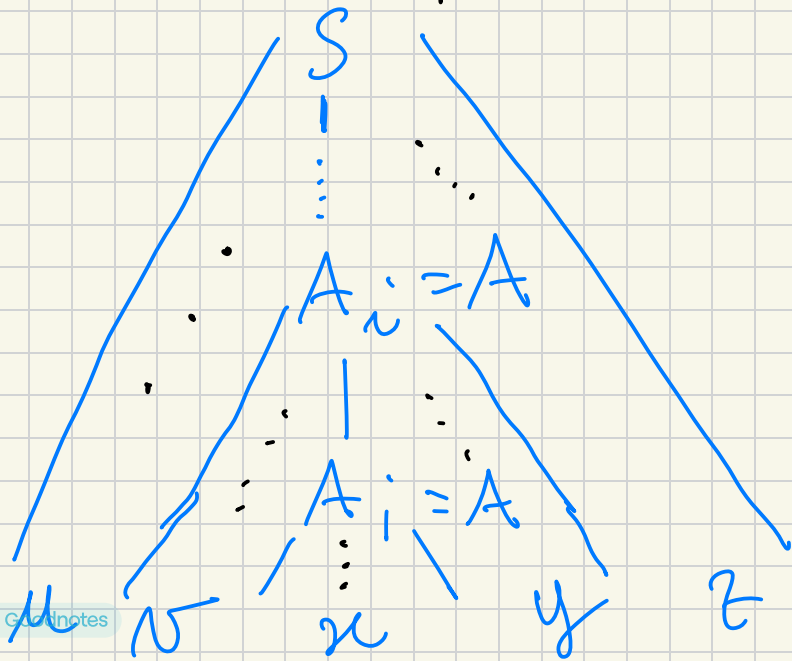
$i$  è la lunghezza del cammino più lungo che si  
 possa fare. Altrimenti il cammino è minore:  $|W| \leq 2^{i-1}$ .

Allora:  $2^m = p \leq |W| \leq 2^{i-1}$

$$\Rightarrow m \leq i-1 ; i \geq m+1.$$

Per questo motivo nel cammino una variabile

A si ripete:



$$S \stackrel{*}{\Rightarrow} u A z$$

$$A \stackrel{*}{\Rightarrow} v A y$$

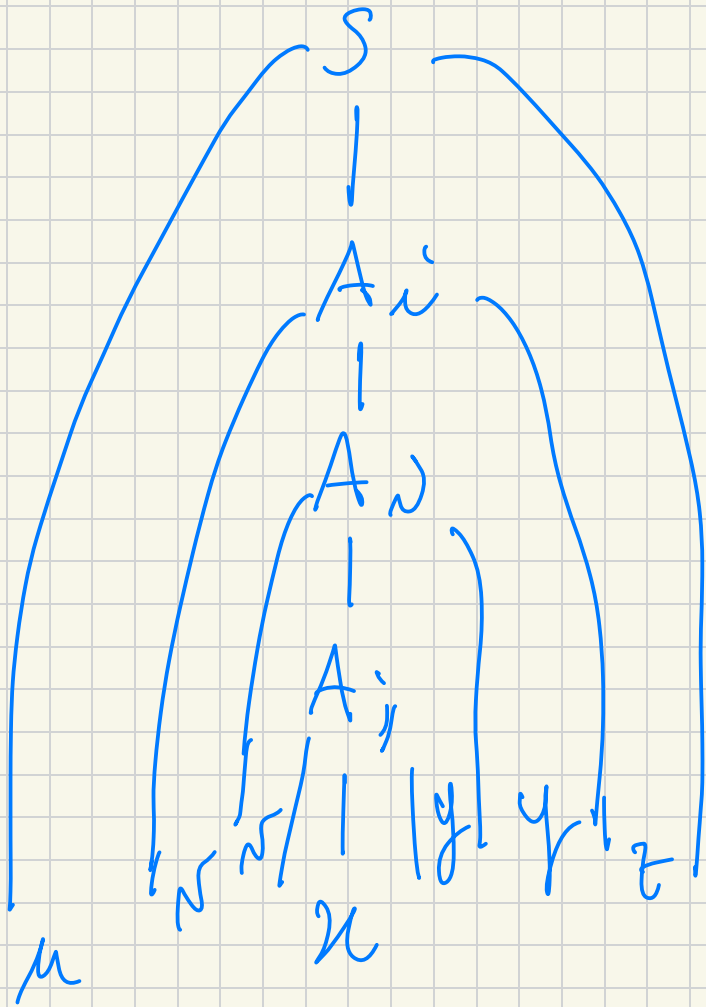
$$A \stackrel{*}{\Rightarrow} x$$

Demostramos propiedades:

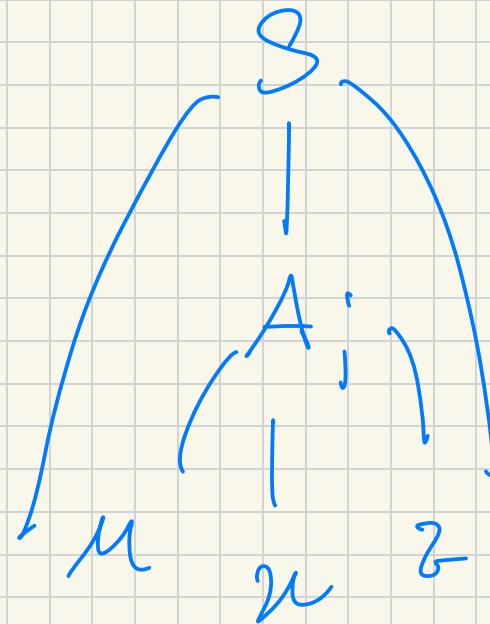
(i) Obviamente  $w = \mu v x y z \in L$ .

$\forall i \geq 1$

$\mu v^i x y^i z \in L$



$n = 0$



$\mu v x y z \in L$

(iii)  $\forall y \neq \varepsilon$ . Si come  $A_i \stackrel{\star}{=} A_j$

e non ci sono regole nuove né  $\varepsilon$ -regole.

Il primo passo nella derivazione sarà  $A \rightarrow BC$

Ma se le altre regole in  $B, C$

sono  $A_j$ , l'altro genere  $\forall$  oppure  $y$ .

$$\Rightarrow \forall xy \neq \varepsilon$$

(iii)  $|\forall xy| \leq p$ . Il sottoalbero ridotto

in  $A_i$  ha altezza  $\leq m+1$  e quindi

genere stringa  $\forall xy$  di lunghezza  $\leq 2^{m+1} - 1 = 2^m = p$

# $\Sigma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$*) \quad L \subseteq \{ 0^m 1^m 2^m : m \geq 1 \}$$

Suppose to show : exists a table...

$$\text{Select } w = 0^p 1^p 2^p \in \text{string } |w| \leq p$$

0 ... 0 | ... | 2 ... 2

any      any

any

any

any column  
of memo 2  
symbols in 3.  
Per  $i \geq 2$   
 $w^i \notin L$ .

\* ) Per caso:  $L = \{ ww : w \in \{0,1\}^* \}$   
non è ACOTESTUALE.

\* ) Dimostrare che i CFL non sono chiusi  
per  $\cap$  e per negazione, ma sono chiusi  
per concatenazione.

Concatenazione: Approccio le grammatiche.

Wlog assumo vocaboli disgiunti  $V_1, V_2$ .

Siano  $G_1 = (V_1, \Sigma, R_1, S_1)$

$G_2 = (V_2, \Sigma, R_2, S_2)$

$$G = (V, \Sigma, R, S)$$

$$S \rightarrow S_1 S_2$$

$$R_1 \left\{ \right.$$

$$R_2 \left\{ \right.$$

Intersezione: Sappiamo che  $L = \{0^m 1^m 2^m : m \geq 0\}$

non è ACCONTENIBILE. Possiamo ottenere  $L$

Come  $L = L_1 \cap L_2$  t.c.  $L_1, L_2 \in CFL$ .

$$L_1 = \{0^m 1^m 2^n : m \geq 0; n \geq 0\}$$

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow 0A_1 \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow 2B \mid \varepsilon$$

$$L_2 = \{ 0^k 1^m 2^m : m \geq 0, k \geq 0 \}$$

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow 0A \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow 1B2 \mid \epsilon$$

Negazione: Osservo che

$$A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$$

\* ) Progetto oh grammatica :

$$L_1 = \{ w \in \{0,1\}^* : \#_1(w) \geq 3 \}$$

$$L_2 = \{ w \in \{0,1\}^* : w = w^R \text{ e } |w| \text{ par } \}$$

$$L_3 = \{ a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0 ; i + j = k \}$$

$$L_4 = \{ w \in \{0,1\}^* : |w| = 2k+1 \text{ e } w_{k+1} = 0 \}$$

$$G_1: S \rightarrow X \mid X \mid X \mid X \mid X$$

$$X \rightarrow \varepsilon \mid 0X \mid 1X$$

Correttezza: Osservo che  $X$  genera  $\{0, 1\}^*$ .

Si può dimostrare per induzione. Inductivamente  $X$  produce  $\varepsilon$  oppure una qualunque combinazione di 0 e 1.

Pot: Se  $S \xRightarrow{*} w$ , allora  $w$  è

della forma  $w_1 \mid w_2 \mid w_3 \mid w_4$

t.c.  $w_1, \dots, w_n \in \{0, 1\}^k$

$$\Rightarrow \#_1(w) \geq 3.$$

D'altra parte : la regola  $S \rightarrow \dots$

impone che la grammatica generi sempre

stringhe  $w$  t.c.  $\#_1(w) \geq 3$ .

$$G_2: S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon$$

Correttezza: Se  $S \stackrel{\#}{\Rightarrow} w$  allora  $w$  ha lunghezza pari e inoltre il primo simbolo è uguale all'ultimo, il secondo al penultimo ecc.

D'altra parte, se  $w \in L_2$  allora

$w = w w^R$  di lunghezza pari. Lo genero guardando a coppie una alla volta e applicando regole corrispondenti in  $G$ .

$$G_3: \begin{aligned} S &\rightarrow aSc \mid X \\ X &\rightarrow bXc \mid \varepsilon \end{aligned}$$

$$G_4: S \rightarrow 010S0 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1$$

$$*) L = \{a, b\}^* \setminus \{ww : w \in \{a, b\}^*\}$$

e ACONTTESTUALE.