ESERCIZI

*) Costruire CFG per:

$$L = \{ w \in \{0,1\}^* : \#_1(w) \geq 3 \}$$

$\#_1(w)$ = # '1' contenuti nella w

Ad esempio, consideriamo G:

$$G \begin{cases} S \to X1X1X1X \\ X \to \varepsilon \mid 0X \mid 1X \; \} \; G' \end{cases}$$

Dimostriamo la correttezza. Devo mostrare che $L(G) = L$.

Partiamo dall'osservazione che G' con $S' = X$ e solo le regole $X \to \cdots$ genera $L(G') = \{0,1\}^*$. Vediamo perché. Da una parte $L(G') \subseteq \{0,1\}^*$: qualsiasi stringa prodotta a partire da X è vuota o fatta di solo '0' e '1', ovvero è contenuta in $\{0,1\}^*$. D'altra parte, anche $\{0,1\}^* \subseteq L(G')$.

Per induzione su $|w|$ t.c. $w \in \{0,1\}^*$:

- Base: $|w| = 0$, e $w = \varepsilon$ e c'è la regola $X \to \varepsilon$, ovvero $w \in L(G')$.
- Passo induttivo: Sia vero per stringhe lunghe $\leq n$ e considero w t.c. $|w| = n+1$ del tipo $w = av$ $a \in \{0,1\}$ e $|v| = n$.

Per induzione: $X \overset{*}{\Rightarrow} v$. Ma allora:

$$X \Rightarrow aX \overset{*}{\Rightarrow} av = w \in L(G').$$

Adesso devo mostrare che $L(G) = L$. Da una parte, se $w \in L(G)$ allora:

$$S \Rightarrow X1X1X1X \overset{*}{\Rightarrow} w$$

Ma allora $w = x1y1z1t$ t.c.

$X \overset{*}{\Rightarrow} x$, $X \overset{*}{\Rightarrow} y$, $X \overset{*}{\Rightarrow} z$ e $X \overset{*}{\Rightarrow} t$.

Ora sappiamo che $x, y, z, t \in \{0,1\}^*$ e quindi $w \in L$. Questo significa $L(G) \subseteq L$.

Resta da mostrare $L \subseteq L(G)$. Sia $w \in L$, ovvero $w = x1y1z1t$ con $x, y, z, t \in \{0,1\}^*$. Ma allora:

$X \overset{*}{\Rightarrow} x, y, z, t$

Ovvero:

$$S \Rightarrow X_1 X_1 X_1 X \overset{*}{\Rightarrow} x1y1z1t = w$$

e $w \in L(G)$.

*) Costruire CFG per

$$L = \{ w \in \{0,1\}^* : w = w^R \text{ e } |w| \text{ pari} \}.$$

Ad es. G:

$$S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon.$$

Correttezza: per casa. $L(G) \subseteq L$ e $L \subseteq L(G)$.

*) Progettare CFG per

$$L = \{ a^n b^i c^k : n, i, k \geq 0, n+i = k \}$$

Ad es:

$$S \to aSc \mid X$$

$$X \to bXc \mid \varepsilon$$

$$S \Rightarrow X \Rightarrow bXc$$

$$\Rightarrow bc$$

$n = 0$.

*) Costruire CFG per

$$L = \{ w \in \{0,1\}^* : |w| = 2k+1 \text{ e } w_{k+1} = 0 \}$$

A.1 es.:

$$S \to 0 \mid 0S0 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1$$

$$S \to 0 \mid X0X$$???

*) Abbiamo visto che i CFL sono chiusi rispetto a UNIONE. Anche visto che le CFL sono chiuse per CONCATENAZIONE.

$$G_1 = (S_1, \dots)$$

$$G_2 = (S_2, \dots)$$

$$G = (S, \dots)$$

$$S \rightarrow S_1 S_2$$

Invece i CFL non sono chiusi né per $\cap$ né per $\overline{(\cdot)}$.

Consideriamo:

$$L_1 = \{ 0^n 1^n 2^i : n \geq 0 ; i \geq 0 \}$$

$$L_2 = \{ 0^k 1^n 2^n : n \geq 0 ; k \geq 0 \}$$

Attenzione: $L_1 \cap L_2 = \{ 0^n 1^n 2^n : n \geq 0 \}$.

G_1:

$$S \to AB$$
$$A \to 0A1 \mid \varepsilon$$
$$B \to 2B \mid \varepsilon$$

G_2: $S \to AB$ ma $L_1 \cap L_2$ non

$A \to 0A \mid \varepsilon$ è ACONTESTUALE.

$B \to 1B2 \mid \varepsilon$

Complemento? Semplicemente:

$$A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$$

quindi non è possibile.

Made with Goodnotes

Alternativamente, posso trovare L t.c. L non è ACONTESTUALE ma il suo complemento sì.

$L = \{ww : w \in \{0,1\}^*\}$ non è ACONTESTUALE. Invece

$$\{0,1\}^* \setminus L \text{ è ACONTESTUALE.}$$

Dimostriamo che $L = \{ww : w \in \{0,1\}^*\}$ non è ACONTESTUALE usando PUMPING

LEMMA. Prendo $w = 0^p 1^p 0^p 1^p$ con $|w| = 4p > p$. Avremo $w = uvxyz$ con $|vy| > 0$ e $|vxy| \le p$.

$$\underbrace{00000}_{A}\;\underbrace{11111}_{B}\;\underbrace{00000}_{C}\;\underbrace{11111}_{D}$$

Procedo per casi:

- CASO 1: vxy dentro A, B, C oppure D. Se faccio pumping con $n \geq 2$:

$00000\ 111111111\ 00000\ 11111 \notin L$

$0^p 1^j 0^p 1^p$ con $j > p$

- CASO 2: vxy tra A e B.

$00\underbrace{000\ 111}_{vxy}11\ 00000\ 11111$

Se facciamo ad es. pumping con $v = 0$

$000 \sqcup 11\ 00000\ 11111$

$\notin L$

- CASO 3: vxy in mezzo tra B e C.

È simile.

Invece:

$\{a,b\}^* \setminus \{ww : w \in \{a,b\}^*\}$ è ACONTESTUALE

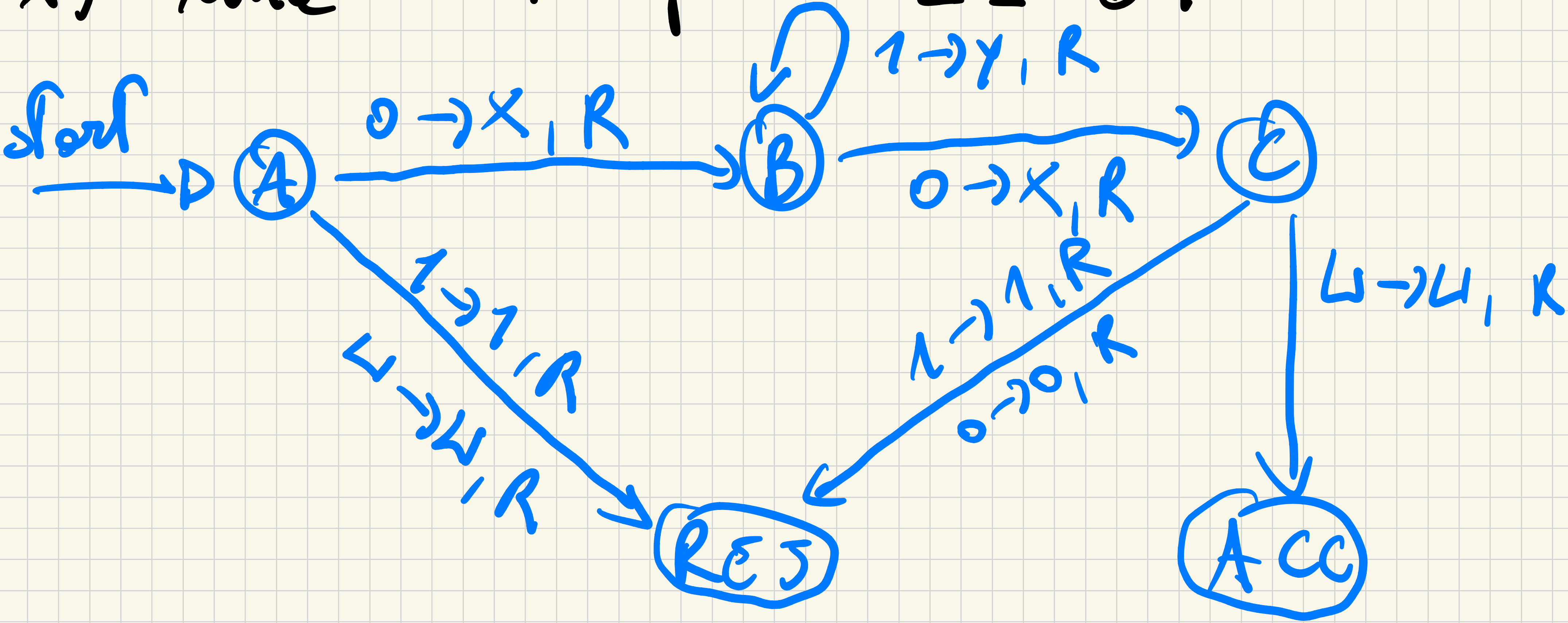
Ecco la grammatica:

$$S \to A \mid B \mid AB \mid BA$$

$$A \to a \mid aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb$$

$$B \to b \mid aBa \mid aBb \mid bBa \mid bBb$$

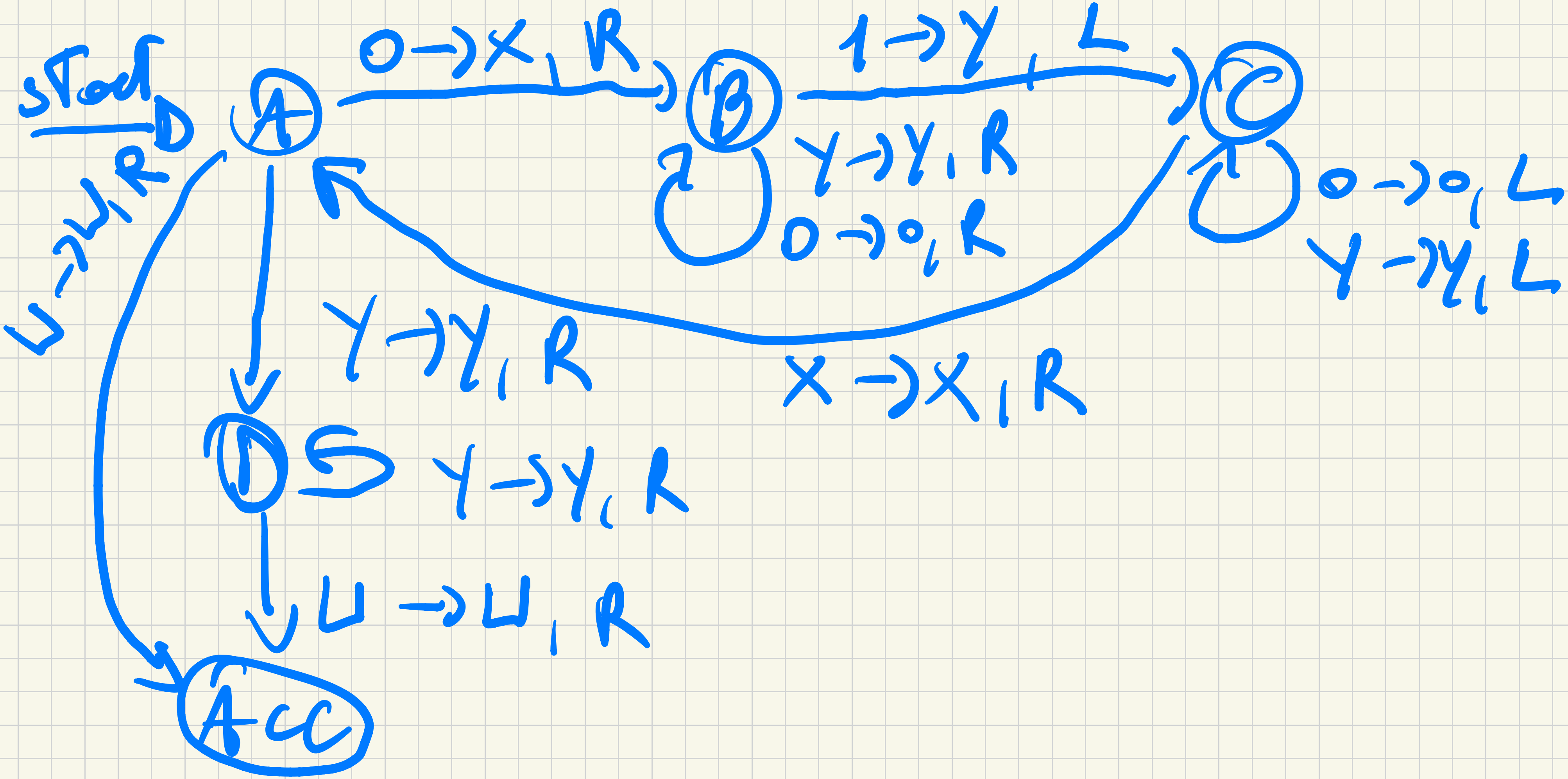
*) Una TM per $L = 0 1^* 0$.



*) Altro esempio $L = \{ 0^n 1^n : n \geq 0 \}$

0 0 0 0 1 1 1 1 ; X 0 0 0 Y 1 1 1

X X 0 0 Y Y 1 1


start
A
B
C
D
ACC
0 → X, R
1 → Y, L
Y → Y, R
0 → 0, R
0 → 0, L
Y → Y, L
X → X, R
Y → Y, R
Y → Y, R
⊔ → ⊔, R
⊔ → ⊔, R