**TEO** $A_{TM} = \{\langle M, w \rangle : M \in TM;\ w \in L(M)\}$

NON è DECIDIBILE.

DIM. Usiamo la diagonalizzazione. Suppongo $A_{TM}$ sia decidibile: $\exists$ TM $H$ t.c. $H$ è un decisore col $L(H) = A_{TM}$, ovvero

$$H(\langle M, w \rangle) = \begin{cases} ACC & \text{se } M \text{ accetta } w \\ REJ & \text{se } M \text{ rifiuta } w \end{cases}$$

Consideriamo la TM $D$ che si basa su $H$:

1) Su input $\langle M \rangle$;
2) Esegue $H$ su $\langle M, \langle M \rangle \rangle$;

3) Se H accetta, D rifiuta e viceversa.

| | $\langle M_1 \rangle$ | $\langle M_2 \rangle$ | ... | $\langle D \rangle$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | ACC | REJ | ... | ACC | ... |
| $M_2$ | ACC | ACC | ... | REJ | ... |
| ⋮ | | | | | |
| $D$ | REJ | ACC | | ??? | |
| ⋮ | | | | | |

Cosa dire su D?

$$
D(\langle M \rangle) = \begin{cases} \text{ACC} & \text{sse } H \text{ REJ } \langle M, \langle M \rangle \rangle \\ & \text{sse } M \text{ REJ } \langle M \rangle \\ \text{REJ} & \text{sse } H \text{ ACC } \langle M, \langle M \rangle \rangle \\ & \text{sse } M \text{ ACC } \langle M \rangle \end{cases}
$$

Inoltre D è un decisore, e avrà una sua codifica $\langle D \rangle$, il linguaggio deciso da D appartiene ad $A_{TM}$.

$$D(\langle D \rangle) = \begin{cases} \text{ACC} & \text{sse } H \text{ REJ } \langle D, \langle D \rangle \rangle \\ & \text{sse } D \text{ REJ } \langle D \rangle \\ \\ \text{REJ} & \text{sse } H \text{ ACC } \langle D, \langle D \rangle \rangle \\ & \text{sse } D \text{ ACC } \langle D \rangle \end{cases}$$

$\rightarrow\leftarrow \quad \blacksquare$

C'è anche un linguaggio concreto che non sia RICONOSCIBILE? Sì. Ad es. $A_{TM}$.

**DEF.** $L$ è co-Turing riconoscibile se $\overline{L}$ è Turing riconoscibile.

**TEO** $L$ è decidibile sse $L$ è Turing riconoscibile e co-Turing riconoscibile.

**COR** Se $L$ non è decidibile allora almeno uno tra $L$ e $\overline{L}$ non sono Turing riconoscibili.

$\Rightarrow$ $A_{TM}$ non è DECIDIBILE

$A_{TM}$ è Turing riconoscibile

$\overline{A_{TM}}$ non è Turing riconoscibile.

DIM (TEO). Sono due direzioni.

($\Rightarrow$) Se $L$ è DECIDIBILE, ma allora anche $\overline{L}$ è DECIDIBILE. Pertanto $L, \overline{L}$ sono Turing riconoscibili.

($\Leftarrow$) Siano $M_1$, $M_2$ e TM t.c. $L(M_1) = L$ e $L(M_2) = \overline{L}$ $\hookrightarrow$ riconoscitori!

Costruisco decisore TM $M$ per $L$:

1) Su input $w$

2) Eseguo in parallelo $M_1(w)$ ed $M_2(w)$.

3) Se $M_1$ accetta, $M$ accetta. Se $M_2$ accetta, $M$ rifiuta.

M decide $L$: $\forall$ $w$ abbiamo $w \in L$ oppure $w \in \overline{L}$. Pertanto solo una tra $M_1$ ed $M_2$ accetterà $w$. M non va mai in loop e accetta sse $w \in L$. ∎

Vedremo che ci sono tanti linguaggi non decidibili o riconoscibili. Attraverso il concetto di RIDUZIONE.

Riducibilità: A, B due linguaggi. Se $A \leq B$ (A si riduce a B), posso usare una sol. di B per risolvere A.

Ovvero, trovare una sol. per A non può

essere più difficile di trovare sol. per B.
Vedremo molti esempi, ed anche come formalizzare il concetto di riduzione.

Es: $HALT_{TM} = \{ \langle M, w \rangle : M \in TM, M(w) \text{ Termina} \}$.

**TEO.** $HALT_{TM}$ non è DECIDIBILE.

DIM. Riduzione: ovvero mostro che se $HALT_{TM}$ fosse decidibile, lo sarebbe anche $A_{TM}$. $\rightarrow\leftarrow$.
Sia R un decisore per $HALT_{TM}$; definisco S che sarà decisore per $A_{TM}$:

1) Su input $\langle M, w \rangle$;

2) Esegue R su $\langle M, w \rangle$.

3) Se R rifiuta, S rifiuta. Se R accetta, S simula M su w e accetta sse M accetta w.

S è decisore. Inoltre S accetta $\langle M, w \rangle$ sse M accetta w. ■

Ancora: $E_{TM} = \{ \langle M \rangle : M \in TM, L(M) = \emptyset \}$

**TEO** $E_{TM}$ non è DECIDIBILE.

DIM. Riduzione ad $A_{TM}$. Sia R la TM che per assurdo decide $E_{TM}$. Prima volta: Definisco S che lancia R su $\langle M \rangle$; se R accetta ($L(M) = \emptyset$), allora S rifiuta.

Se R rifiuta, S simula M su w e decide di conseguenza. Problema: M può andare in loop su w.

Seconda idea: Modifico M in M' che rifiuta tutte le stringhe tranne w. Poi uso R su $\langle M' \rangle$

TM $M'$:

1) Su input $x$, se $x \neq w$ rifiuta.

2) Se $x = w$, simula M su w e accetta sse M accetta.

TM S:

1) Input: $\langle M, w \rangle$.

2) Definisce $\langle M' \rangle$ usando $\langle M \rangle$.

3) Esegue R su $\langle M' \rangle$.

4) Se R accetta, S rifiuta. Se R rifiuta allora S accetta.