Formalizziamo il concetto di RIDUZIONE. Una TM calcola una funzione $f(x)$ se iniziando con input x e termina con $f(x)$ sul nastro.

DEF Una funzione $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ è CALCOLABILE se $\exists$ TM M che la calcola: $\forall w \in \Sigma^*$ M termina con $M(w)$ sul nastro.

Le riduzioni precedenti: ad es. la TM S della riduzione precedente inizia con $\langle M, w \rangle$ e calcola $\langle M' \rangle$.

DEF (RIDUCIBILITÀ). Il linguaggio A è riducibile (mediante funzione) al linguaggio B, $A \leq_m B$, se $\exists f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ calcolabile t.c. $\forall w \in \Sigma^*$: $w \in A$ sse $f(w) \in B$.

Notare che ci sono due condizioni nella def.:

1) $w \in A \Rightarrow f(w) \in B$.

2) $f(w) \in B \Rightarrow w \in A$

$(w \notin A \Rightarrow f(w) \notin B)$.

TEO Se $A \leq_m B$, e B decidibile, allora A è decidibile.

COR. Se $A \leq_m B$, e A NON decidibile, allora B NON decidibile.

DIM (THM). Costruisco decisore per A (M_A) dato decisore per B (M_B). Il decisore per A (M_A):

- Su input $w \in \Sigma^*$, calcola $f(w)$.
- Esegue M_B su $f(w)$. Se M_B accetta, M_A accetta se M_B rifiuta M_A rifiuta.

Funziona perché $\forall w \in \Sigma^* : w \in A \iff f(w) \in B$ ∎

$$M_B \xleftarrow{\;f(w)\;} M_A \xleftarrow{\;w \overset{?}{\in} A\;}$$

$$\xrightarrow{\;b \in \{0,1\}\;} \quad f(w) \quad \xrightarrow{\;b\;}$$

Problema decisionale per A.

ESERCIZI

Vediamo alcuni esempi di riduzioni.

*) $HALT_{TM} = \{\langle M, w\rangle : M \in TM,\ M(w) \neq \infty\}$

↳ No Loop.

non è DECIDIBILE.

Applico il concetto di riduzione: $A_{TM} \leq_m HALT_{TM}$.

Devo far vedere: $\exists f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ t.c.

↳ CALCOLABILE.

$x = \langle M, w\rangle \in A_{TM}$ sse $f(\langle M, w\rangle) \in HALT_{TM}$.

$(\forall x \in \Sigma^*)$. Definisco la TM che calcola f:

- Su input $\langle M, w\rangle$ costruisce TM M'

- Su input x la TM M' esegue M su x; se M accetta allora M' accetta. Se M rifiuta, allora M' entra nello stato "muovi sempre a Dx".
- Output: $\langle M', w \rangle$.

Correttezza:

($\Rightarrow$) $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$ allora M accetta w. Pertanto M' accetta w (M' termina su w). Quindi $\langle M', w \rangle \in HALT_{TM}$.

($\Leftarrow$) $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$, allora $M(w) \in \{REJ, \infty\}$. Se $M(w) = \infty$, anche $M'(w) = \infty$. Se invece

$M(w) = REJ$, $M'(w)$ muove sempre a DX
ovvero $M'(w) = \infty$. quindi $\langle M', w \rangle \notin HALT_{TM}$.

*) $EQ_{TM} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle : M_1, M_2 \in TM, L(M_1) = L(M_2) \}$.
non è decidibile.

Facciamo una riduzione ad E_{TM} che pure abbiamo mostrato essere indecidibile.

Mostriamo $E_{TM} \leq_m EQ_{TM}$: $\exists f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ t.c. $\forall$ input in Σ^*:

$$\langle M \rangle \in E_{TM} \text{ sse } f(\langle M \rangle) \in EQ_{TM}.$$

La TM che calcola f:

- Su input $\langle M \rangle$ definisce una TM M'.

- La TM M', su input x rifiuta sempre.
- Output $\langle M, M' \rangle$.

Perché funziona?:

$(\Longrightarrow)$ Se $\langle M \rangle \in E_{TM}$, $L(M) = \emptyset$.
Ma per def. $L(M') = \emptyset$ e quindi
$L(M) = L(M') = \emptyset$. Ovvero $\langle M, M' \rangle \in EQ_{TM}$.

$(\Longleftarrow)$ Se $\langle M \rangle \notin E_{TM}$, $L(M) \neq \emptyset$. Per def. $L(M') = \emptyset$ e quindi $L(M) \neq L(M')$.
Ovvero $\langle M, M' \rangle \notin EQ_{TM}$.

Possiamo usare le riduzioni per dimostrare che altri linguaggi non sono Turing riconoscibili (oltre $\overline{A_{TM}}$?).

TEO Se $A \leq_m B$, e B Turing ric., allora A Turing-ric.

COR Se $A \leq_m B$, e A non è Turing ric., allora B non è Turing ric.

Sappiamo che $\overline{A_{TM}}$ non è Turing ric., basta considerare questo linguaggio nelle riduzioni. Siccome $\overline{A_{TM}}$ è strano, sarebbe meglio ridurre col A_{TM}.

TEO Se $A \leq_m B$, allora $\overline{A} \leq_m \overline{B}$.

DIM. Banale: la funzione f è la stessa!

$$\forall w \in \Sigma^* : \quad w \in A \text{ sse } f(w) \in B$$

$$w \in \overline{A} \text{ sse } f(w) \in \overline{B}$$

$\blacksquare$

$\Rightarrow$ Conseguenza: Se $A \leq_m B$, e $\overline{A}$ non è Turing-ric., allora $\overline{B}$ non è Turing ric.

Posso evitare il complemento: Ad es EQ_{TM} non è Turing-riconoscibile. Allora basta mostrare $A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$.

Ovvero: $\exists f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ t.c.

$$\langle M, w\rangle \in A_{TM} \text{ sse } f(\langle M, w\rangle) \in \overline{EQ_{TM}}$$

La TM che calcola f:

- Input: $\langle M, w\rangle$.
- Costruisci TM M_1, M_2:
  - M_1 rifiuta per ogni input x
  - M_2 per ogni x esegue $M(w)$ e accetta x sse $M(w)$ accetta.
- Output: $\langle M_1, M_2\rangle$.

($\Longrightarrow$) Se $\langle M, w\rangle \in A_{TM}$, allora $M(w) = Acc.$

Per def. $L(M_1) = \emptyset$ mentre M_2 accetta sempre.

$L(M_1) \neq L(M_2)$ e $\langle M_1, M_2 \rangle \in \overline{EQ_{TM}}$.

$(\Longleftarrow)$ $\langle M_1, M_2 \rangle \in \overline{EQ_{TM}}$ ovvero $L(M_1) \neq L(M_2)$.

Ma $L(M_1) = \emptyset$ per def. Pertanto $L(M_2) \neq \emptyset$.

Ma quando succede che M_2 accetta qualcosa?

Solo se $M(w) = Acc$. Ovvero $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$.

*) $L = \{ \langle M' \rangle : M' \in TM,\ M'$ accetta tutte e sole le stringhe in $\{0,1\}^*$ di lunghezza dispari $\}$.

non è DECIDIBILE.

Costruisco $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ t.c.

$$\langle M, w \rangle \in A_{TM} \text{ sse } f(\langle M, w \rangle) \in L.$$

La TM che calcola f restituisce una TM M':

- Su input x, se $|x|$ è PARI rifiuta.
- Altrimenti, accetta x sse $M(w) = ACC$.

$(\Rightarrow)$ $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$ ovvero $M(w) = ACC$.

Pertanto M' accetta tutte e sole le stringhe di lunghezza dispari. Ovvero $\langle M' \rangle \in L$.

$(\Leftarrow)$ $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$, ovvero $M(w) \in \{REJ, \infty\}$.

Ma allora M' rifiuta sempre e quindi

$$\langle M' \rangle \notin L.$$

*) $L = \{ \langle M \rangle : M \in TM,\ L(M) = \{0^n 1^n 0^n ; n \geq 0\} \}$

non è DECIDIBILE.

Mostro $A_{TM} \leq_m L$: $\exists f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ t.c.

$$\langle M, w \rangle \in A_{TM} \text{ sse } f(\langle M, w \rangle) \in L.$$

La TM per f:

- Input: $\langle M, w \rangle$.
- Costruisce TM M':
    - Su input x, esegue $M(w)$.
    - Se $M(w) = ACC$, controlla che $x = 0^n 1^n 0^n$ $(n \geq 0)$ e in tal caso accetta x. (Se $x \neq 0^n 1^n 0^n$, rifiuta x).
    - Se $M(w) = REJ$, M' rifiuta x.
- Output $\langle M' \rangle$.

($\Rightarrow$) Se $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$, allora $M(w) = ACC$. Allora M' accetta x sse $x = 0^n 1^n 0^n$ $(n \geq 0)$.

Ovvero $\langle M' \rangle \in L$.

$(\Leftarrow)$ Se $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$, allora $M(w) \in \{REJ, \infty\}$.

Nel caso in cui $M(w) = REJ$, allora M' rifiuta sempre: $L(M') = \emptyset \neq \{0^n 1^n 0^n : n \geq 0\}$. Ovvero $\langle M' \rangle \notin L$.

Nel caso in cui $M(w) = \infty$, anche M' andrà in loop su ogni x. Ancora $L(M') = \emptyset \neq \{0^n 1^n 0^n : n \geq 0\}$.

*) $L = \{ \langle M \rangle : M \in TM,\ L(M) \supseteq$ tutte le stringhe che iniziano con $0 \}$.

non è DECIDIBILE.

Per riduzione: $A_{TM} \leq_m L$. Ovvero $\exists f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ t.c. $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$ sse $f(\langle M, w \rangle) \in L$.

La TM che calcola f:

- Input: $\langle M, w \rangle$.
- Definisce TM M' che su input x esegue $M(w)$. Se $M(w) = ACC$, M' accetta x; se $M(w) = REJ$, M' rifiuta x.

($\Rightarrow$) $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$, ovvero $M(w) = ACC$. Allora $L(M') = \Sigma^*$ e Σ^* contiene tutte le stringhe che iniziano con 0. Quindi $\langle M' \rangle \in L$.

($\Leftarrow$) $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$, ovvero $M(w) \in \{REJ, \infty\}$.

$L(M') = \emptyset$, pertanto $\langle M' \rangle \notin L$.

*) $U = \{ \langle T, T' \rangle : T, T' \in TM, \ L(T) \cup L(T') = \Sigma^* \}$.

non è DECIDIBILE.

Mostro $A_{TM} \leq_m U$: $\exists f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ t.c.

$\langle M, w \rangle \in A_{TM}$ sse $f(\langle M, w \rangle) \in U$.

La TM per f:

- Input: $\langle M, w \rangle$.
- Definisce T la TM che su input x rifiuta x.
- Definisce T' la TM che su x accetta sse

$M(w) = Acc.$

- Output: $\langle T, T' \rangle$.

($\Rightarrow$) $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$, $M(w) = Acc.$ $L(T) = \emptyset$ e $L(T') = \Sigma^*$. Quindi $L(T) \cup L(T') = \Sigma^*$ ovvero $\langle T, T' \rangle \in U$.

($\Leftarrow$) $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$, $M(w) = \{REJ, \infty\}$.
$L(T) = \emptyset = L(T')$.

$$L(T) \cup L(T') \neq \Sigma^*$$

$$\langle T, T' \rangle \notin U.$$