Abbiamo mostrato che il seguente linguaggio non è DECIDIBILE:

$$A_{TM} = \{ \langle M, w \rangle : M \in TM \text{ e } M(w) = Acc \}$$

TEO L è DECIDIBILE sse L è TURING-RIC. e COTURING-RIC.

(L è COTURING-RIC. se $\overline{L}$ è TURING-RIC.)

COR Se L non è DECIDIBILE, allora almeno uno tra L ed $\overline{L}$ non è TURING-RIC.

COR A_{TM} non è TURING-RIC.

DIM (THM). ($\Rightarrow$) Se L è DECIDIBILE, allora $\overline{L}$ è DECIDIBILE. Quindi anche L, $\overline{L}$ sono TURING-RIC.

$\Leftarrow$ Date M_1, M_2 TM t.c. M_1 riconosce L e M_2 riconosce $\overline{L}$, costruisco M

che decide L. Idea: M simula i singoli passi di esecuzione di M_1, M_2 in parallelo, ad esempio usando 2 nastri. Se M_1 accetta, allora M accetta. Se M_2 accetta, allora M rifiuta.

$\forall x : x \in L$ oppure $x \in \overline{L}$ ovvero

$$M(x) = ACC \quad \text{sse} \quad x \in L$$

e M è un decisore. $\blacksquare$

Introduciamo una tecnica per dimostrare che altri linguaggi non sono DECIDIBILI oppure RICONOSCIBILI: la riduzione.

Aumentiamo il modello delle TM aggiungendo NASTRO DI OUTPUT. Questo è WLOG.

Diremo che una TM calcola una funzione su un dato input se iniziando con input w sul nastro input e terminano con $f(w)$ sul nastro output.

DEF $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ è CALCOLABILE se $\exists$ TM M che calcola f $\forall w \in \Sigma^*$.

Esempio: le trasformazioni di codifiche che abbiamo usato nelle scorse lezione.

DEF (MAPPING REDUCTIONS). A è RIDUCIBILE tramite funzione a B ($A \leq_m B$) se $\exists\, f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ calcolabile tale che $\forall\, w \in \Sigma^*$:

$$w \in A \quad \underline{\underline{\text{sse}}} \quad f(w) \in B.$$

$$\left(\begin{array}{l} w \in A \Rightarrow f(w) \in B \\ w \notin A \Rightarrow f(w) \notin B \end{array} \right)$$

TEO Se $A \le_m B$ e B DECIDIBILE, allora A DECIDIBILE.

COR Se $A \le_m B$ e A è INDECIDIBILE allora B è INDECIDIBILE.

DIM (COR). Se B fosse DECIDIBILE allora A sarebbe DECIDIBILE per il Teorema $\uparrow$

DIM (TEO). Sia M la TM che decide B e sia F la TM che calcola la mapping reduction f da A a B.

Decisore M' per A:

- Su input w calcola $f(w)$ usando F.
- Poi lancia M su $f(w)$ e ACCETTA sse M ACCETTA.

M' è decisore perché M lo è e F termina sempre. Inoltre:

$$M'(w) = Acc \quad \text{sse} \quad M(f(w)) = Acc$$

sse $f(w) \in B$

sse $w \in A$ ☒

Applicazione: $HALT_{TM} = \{ \langle M, w \rangle : M \in TM$
$e\ M(w) \neq LOOP \}$.

È INDECIDIBILE. Lo dimostro esibendo una mapping reduction $A_{TM} \leq_m HALT_{TM}$

Devo esibire una $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ calcolabile tale che $\forall$ input

$$\langle M, w \rangle \in A_{TM} \text{ sse } f(\langle M, w \rangle) \in HALT_{TM}$$

Definisco la seguente f:

- Su input $\langle M, w \rangle$.
- Definisce una TM M': Su input x esegue $M(x)$. Se $M(x) = ACC$, allora $M'(x) = ACC$. Altrimenti $M'(x) = LOOP$ (muove indefinitamente a DX).

- Output $\langle M', w \rangle$.

La funzione f è calcolabile ($\exists$ TM F che la calcola per ogni input).

Correttezza: ($\Longrightarrow$) Se $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$.
Cosa posso dire di $\langle M', w \rangle$? Che termina perché $M'(w) = M(w) = ACC$. Ovvero $\langle M', w \rangle \in HALT_{TM}$.

($\Longleftarrow$) Se $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$. Allora $M(w) = REJ$ o $LOOP$. In questo caso $M'(w) = $ LOOP (se $M(w) =$ REJ, $M'(w)$ muove sempre a DX).

Ovvero $\langle M', w \rangle \notin HALT_{TM}$. $\boxtimes$

Altro esempio:

$$E_{TM} = \{ \langle M \rangle : M \in TM, L(M) = \emptyset \}$$

È INDECIDIBILE.

Facciamo la mapping reduction al complemento: $\overline{E_{TM}}$. Ovvero, $A_{TM} \leq_m \overline{E_{TM}}$.

Definisco $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ t.c.

$$\langle M, w \rangle \in A_{TM} \quad \text{sse}$$

$$f(\langle M, w \rangle) \in \overline{E_{TM}}$$

La funzione f:

- Dato $\langle M, w \rangle$ restituisce un output $\langle M' \rangle$ tale che:
  - M' su x, se $x \neq w$ rifiuta
  - Se $x = w$, simula M su w e accetta sse M accetta w.

f è CALCOLABILE.

($\Rightarrow$) $\langle M, w\rangle \in A_{TM}$, guardiamo M'.

Se $x \neq w$, rifiuta x. Ma se $x = w$ lancia $M(w)$; ovvero M' accetta w.

Ovvero, $L(M') \neq \emptyset$ e quindi $\langle M'\rangle \in \overline{E_{TM}}$.

($\Leftarrow$) $\langle M, w\rangle \notin A_{TM}$. Guardiamo M'.

Se $x \neq w$, rifiuta; se $x = w$, $M'(x)$ rifiuta o loop. Ovvero $\langle M'\rangle \notin \overline{E_{TM}}$

perché $L(M') = \emptyset$. $\boxtimes$

Altro esempio:

$$REG_{TM} = \{ \langle M \rangle : M \in TM \; L(M) \in REG \}.$$

è INDECIDIBILE.

Mapping reduction $A_{TM} \leq_m REG_{TM}$.

La funzione $f(\langle M, w \rangle)$ restituisce $\langle M' \rangle$.

La TM M':

per qualsiasi $n \geq 0$

- Su x, se $x = 0^n 1^n$ accetta
- Se $x \neq 0^n 1^n$, simula M su w e accetta x sse $M(w) = Acc$.

($\Rightarrow$) Se $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Allora $M(w) = Acc$. $L(M') = ? = \Sigma^*$ e Σ^* è regolare. Ovvero $\langle M' \rangle \in REG_{TM}$.

($\Leftarrow$) Se $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$. Allora $M(w) = REJ$ o $LOOP$.

Allora $L(M') = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$.

Pertanto $\langle M' \rangle \notin REG_{TM}$. $\blacksquare$