THM Se $A \leq_m^P B$ e $B \in P$, allora $A \in P$.

DIM. Dato M_B t.c. $L(M_B) = B$ e M_B è poly-time considero la TM:

$$M_A(\cdot) = M_B(R(\cdot)),$$

dove $R(\cdot)$ è la mapping reduction per $A \leq_m^P B$. Chiaramente M_A è poly-time con complessità $poly(poly(n)) = poly(n)$.

Inoltre:

$$x \in A \iff R(x) \in B$$

$$\iff M_B(R(x)) = Acc$$

$$\iff M_A(x) = Acc. \quad \blacksquare$$

In maniera del tutto analoga:

THM Se $A \leq_m^P B$ e $B \in NP$, allora $A \in NP$.

Dim. Identica, ma sostituiamo M_A e M_B con le rispettive NTM N_A, N_B $\blacksquare$

FATTO "$\leq_m^p$" è TRANSITIVA: Se $A \leq_m^p B$ e $B \leq_m^p C$, allora $A \leq_m^p C$.

Infatti esistono R_{AB}, R_{BC} t.c. $\forall x$

$$x \in A \iff R_{AB}(x) \in B$$

$$x \in B \iff R_{BC}(x) \in C$$

Pertanto, posto $R_{AC}(\cdot) = R_{BC}(R_{AB}(\cdot))$

$$x \in A \iff R_{AC}(x) \in C.$$

e R_{AC} è poly-time.

Vediamo alcuni esempi.

THM $4COL \le_m^p SAT$.

DIM. Dato un grafo $G = (V, E)$ 4-colorabile, devo costruire una formula Φ_G t.c. Φ_G soddisfacibile sse G 4-col.

La formula avrà $2n$ variabili: $x_1, x_1', \dots, x_n, x_n'$ dove $n = |V|$. Ogni coppia di variabili $x_i, x_i' \in \{0,1\}$ codifica un colore:

x_i	x_i'	COLORE
F	F	R
F	V	B

V F Y
V V W

Nella formula, per ogni arco $(v,j) \in E$ codifico la regola di avere colori diversi:

"$(x_i, x_i') \neq (x_j, x_j')$" $\Longleftrightarrow$

$$\neg (x_i \longleftrightarrow x_j \wedge x_i' \longleftrightarrow x_j')$$

Poi traduco "$\rightarrow$" con "$\vee$", "$\wedge$", "$\neg$"

e ottengo una formula ϕ_{vj}.

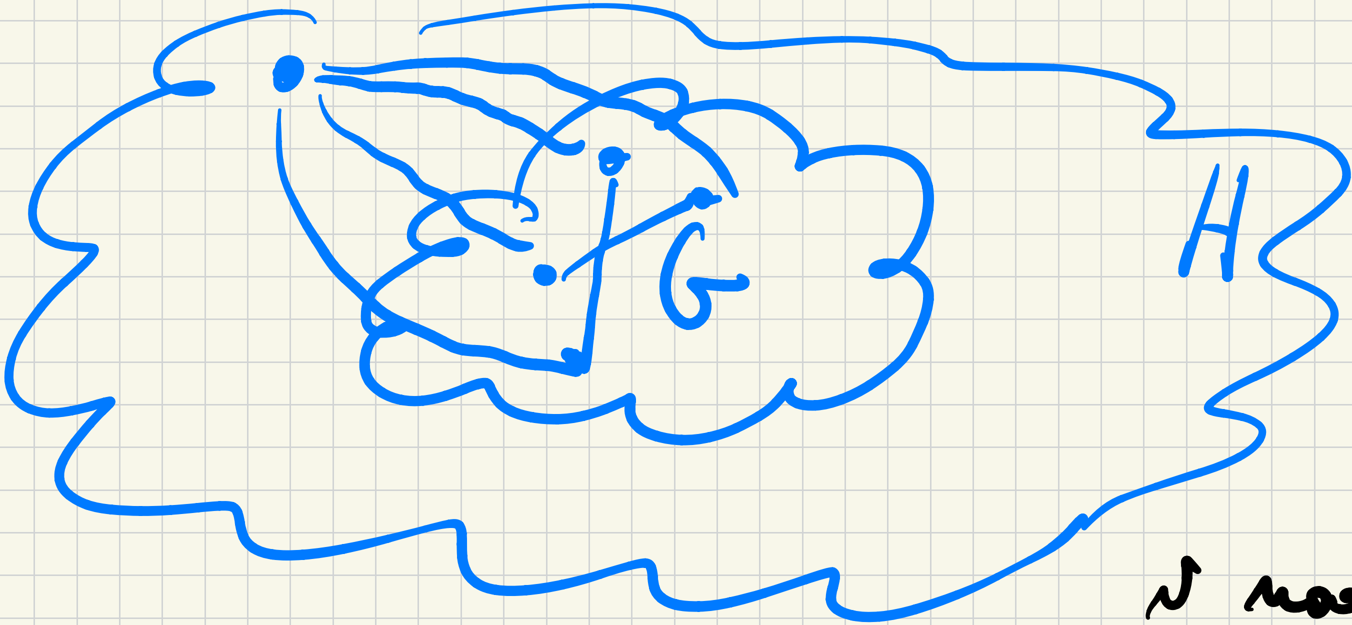
$$\phi_G(\cdot) = \bigwedge_{(i,j) \in E} \phi_{vj}(\cdot)$$

La correttezza è immediata: $\phi_G \in SAT$ sse $G \in 4COL$. $\blacksquare$

Altro esempio:

THM $3COL \leq_m^p 4COL$.

Dim. Devo definire $R(\langle G \rangle) = \langle H \rangle$ t.c. $G \in 3COL$ sse $H \in 4COL$.



Aggiungo un nodo e lo collego a tutti i nodi di G.

$G \in 3COL \iff H \in 4COL$. Se $G \in 3COL$ posso colorare il nuovo nodo con il quarto colore. Se $H \in 4COL$, il nuovo nodo deve avere colore diverso da tutti gli altri e G deve essere in $3COL$. $\blacksquare$

$$\Rightarrow 3COL \le_m^p 4COL \le_m^p SAT.$$

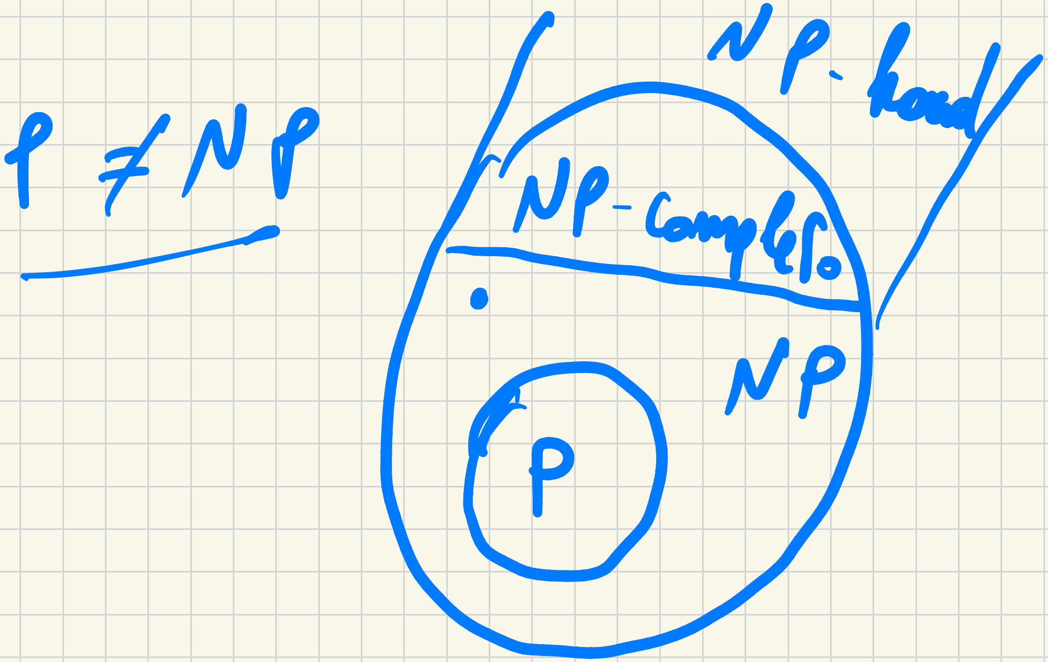
ovvero $3COL \le_m^p SAT$.

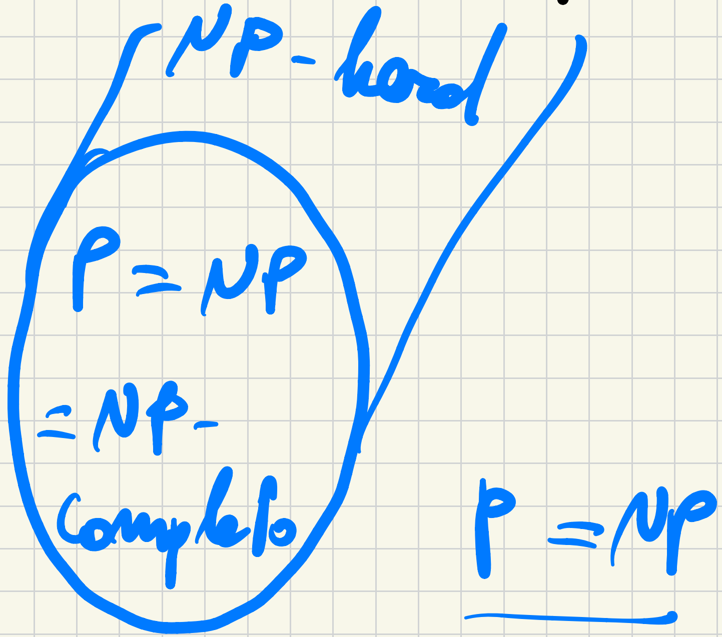
In effetti, si può anche dimostrare che $SAT \le_m^p 3COL$. Ma è più complicato.

Possiamo ora definire NP-completezza.

DEF Un linguaggio S è NP-difficile se $\forall L \in NP$ abbiamo $L \leq_m^p S$.

DEF Un linguaggio S è NP-completo se S è NP-difficile e $S \in NP$.





THM Se S è NP-completo, allora $S \in P$ sse $P = NP$.

DIM. ($\Rightarrow$) $\forall L \in NP$, $L \leq_m^P S$. Se $S \in P$ allora $L \in P$ e quindi $P = NP$.

($\Leftarrow$) Se $P = NP$ e S è NP-completo allora $S \in NP = P$. Ovvero $S \in P$ $\blacksquare$

Risultato fondamentale che ora mostreremo:

THM (Cook-Levin). SAT è NP-completo.

In realtà è vero per 3SAT pure.

DIM. In primis, $SAT \in NP$ e questo

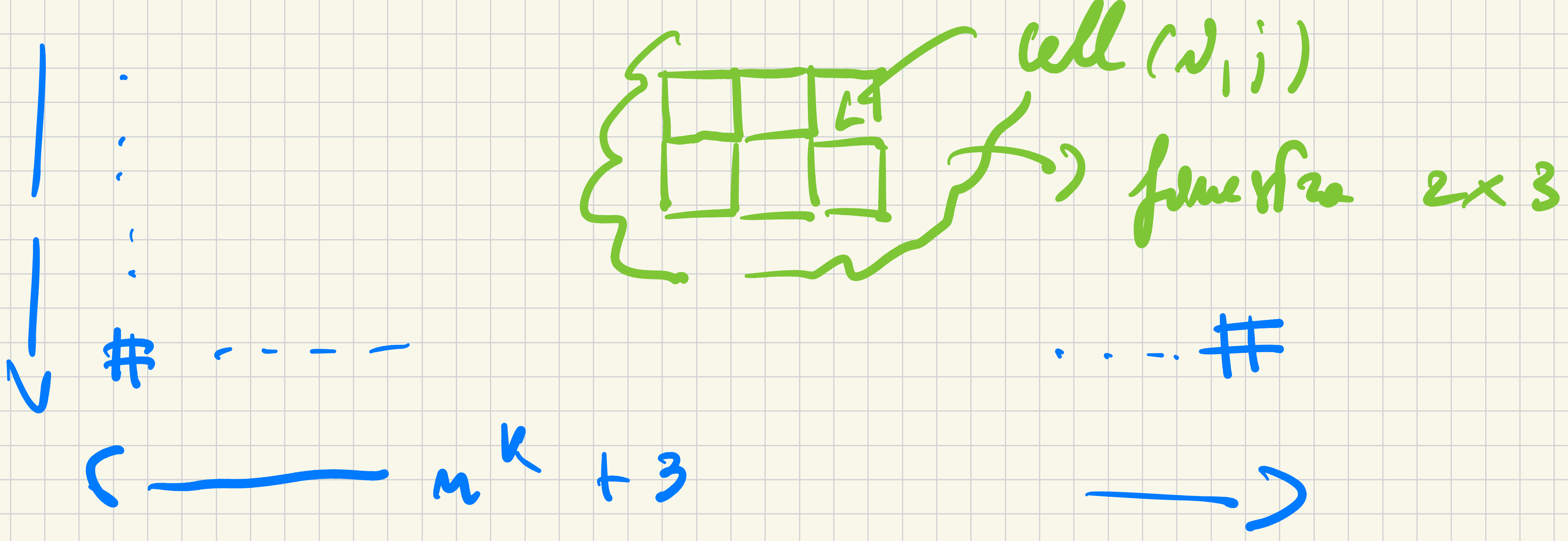
quì l'abbiamo mostrato. Dobbiamo mostrare SAT è NP-difficile.

Ovvero: Dato $L \in NP$ devo far vedere $L \leq_m^p SAT$. L'unica cosa che sappiamo è che $\exists$ NTM N poly-time t.c. $L(N) = L$.

Supponiamo in tempo n^k per qualche k.

Definiamo il concetto di tableau associato ad un ramo di computazione det. di N:

$$\begin{array}{c|l}
\uparrow & \# \; q_0 \; w_1 \; w_2 \; \dots\dots \; w_n \; \sqcup \; \dots\dots \; \sqcup \; \# \\
 & \# \; \dots\dots \qquad\qquad\qquad \dots\dots \; \# \\
n^k & \# \; \dots\dots \qquad\qquad\qquad \dots\dots \; \#
\end{array}$$



Stabilire se $w \in L$ è equivalente a stabilire se $\exists$ tableau accettante (ovvero che contiene configurazione di accettazione).

Dimensione tableau: $O(n^k \times n^k)$.

Devo costruire una formula ϕ_N che è soddisfacibile sse N accetta w.

Le variabili: Sia Q insieme stati e Γ l'alfabeto di nastro. Pongo: $C = Q \cup \Gamma \cup \{\#\}$

Per ogni $i, j \in [n^k]$ associo la variabile
$s \in C$

$$x_{i,j,s} = 1 \quad \text{sse}$$

$$cell(i, j) = s$$

Le formule:

$$\phi_N = \phi_{cell} \wedge \phi_{start} \wedge \phi_{move} \wedge \phi_{accept}$$

Made with Goodnotes